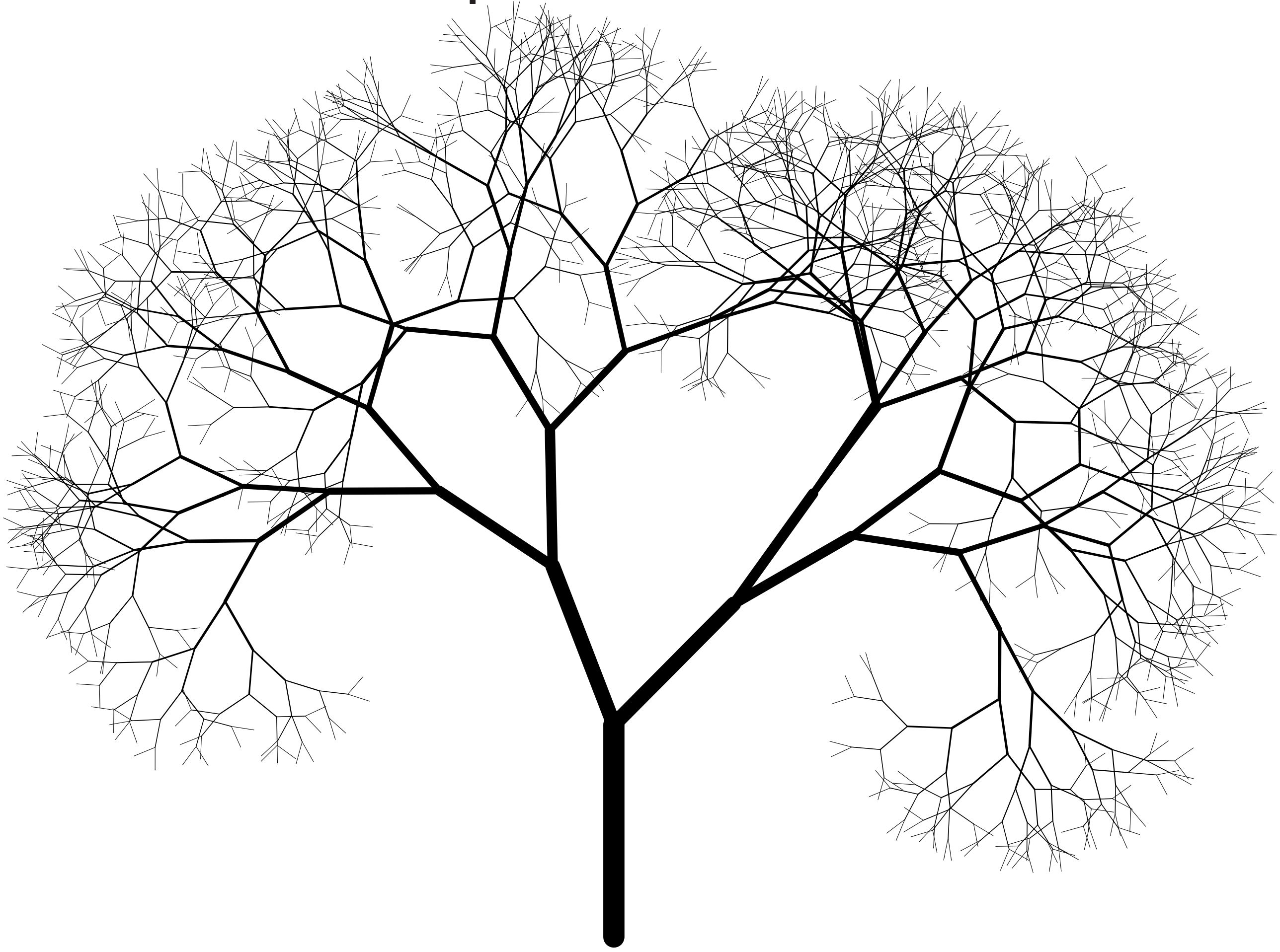
STROM
Korešpondenčný matematický seminár



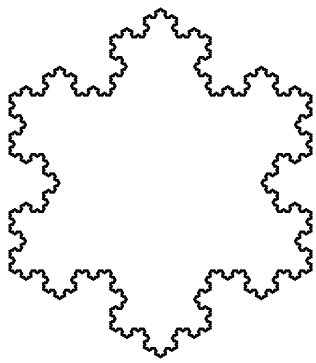
Ahojte, Stromáci!

„Ja som malá vianočka, ružové mám líčka.“ Aj Vy si túto pesničku spievate stále dokola? To je jasnou predzvesťou toho, že prichádzajú najkrajšie sviatky – Vianoceeeeee. Keďže ste boli všetci dobrí, tak Vám Ježiško (aj keď trošku predčasne) priniesol najnovší **STROM**ček. Tí, ktorí boli najlepší, sa už teraz môžu tešiť na sústredenie, ktoré sa uskutoční od 13. do 18. februára 2010. Želáme Vám šťastné Vianoce a veselý nový rok. Dúfame, že v budúcom kalendárnom roku si na **STROM** spomeniete a opäť sa pustíte do riešenia úloh letného semestra.

Vaši **STROM**isti

Vianočný MaxiKlub

Aj tento rok sa uskutoční príjemné posedenie terajších aj bývalých riešiteľov, vedúcich, priateľov a vôbec všetkých, ktorí majú kladný vzťah k Matiku, Stromu či Malynáru. Náplňou bude stretnúť sa, porozprávať sa, spoznať nových ľudí a možno bude aj kapustnica. Táto super udalosť sa uskutoční v stredu, 22. decembra, na Prírodovedeckej fakulte na Jesennej 5 v Košiciach, v miestnosti P15 v suteréne v čase od 13:00 do 18:00. Tešíme sa na vás všetkých :-)



Riešenia 2. série úloh zimného semestra 35. ročníka

1. Na ostrove „Pochúťka“ žije 20 kanibalov. Každý z kanibalov má niektorých zo svojich spoluostrovčanov rád a zvyšok nemá rád (nikdy to však nemenia). Každý deň, všetkých, ktorých má rada aspoň polovica žijúcich obyvateľov ostrova, zabijú a zjedia na večeru. Ukážte, že ak prvého októbra bol zjedený prvý kanibal, tak od jedenásteho októbra už nie je možné zjesť nikoho, lebo nikto zo žijúcich kanibalov nechutí aspoň polke obyvateľov ostrova.

Opravovali: Tomáš Lučivjanský a Gaba Vozáriková **Počet riešiteľov: 43**

Riešenie:

Skúsme dokázať najprv to, že 11. októbra už nemôžu nikoho jesť. Poďme na to sporom. Predpokladajme, že môže nastať situácia, kedy aj v 11. deň budú niekoho na ostrove jesť. Potom musia platiť nasledujúce pozorovania:

Pozorovanie č. 1: V každom z predošlých dní (teda od 1. do 10. októbra) musel byť zjedený aspoň jeden.

Prečo? No ak by v nejaký deň nebol zjedený nikto, znamenalo by to, že neexistuje taký kanibal, ktorého by mala rada aspoň polovica obyvateľov. Do ďalšieho dňa prežije rovnaká zostava kanibalov, teda v nej ani v tomto dni neexistuje kanibal vhodný na jedenie (preferencie kanibalov sa nemenia, preto je situácia rovnaká). Podobné to bude aj v ďalšie dni. Ak už raz prestanú jesť, nebudú jesť už nikdy, a teda by nejedli ani 11. októbra.

Teraz pre každého kanibala označme L počet ľudí, ktorí ho majú radi. Označme X_N počet ľudí, ktorý stačí na to, aby bol kanibal s $L \geq X_N$ zjedený v N-tom dni (rátanom od prvého októbra). V prvom dni je teda $X_1 = 10$, čiže každý kanibal, ktorého má rado aspoň 10 ľudí, bude zjedený.

Pozorovanie č. 2: Číslo X_N s rastúcim N klesá (teda každým dňom).

Ukážeme, že pre ľubovoľné dva po sebe idúce dni i a $i+1$ je $X_i > X_{i+1}$. Nech X_1 je v poradí v prvom dni, X_2 v druhom. V prvom sa teda zjedia všetci s $L \geq X_1$. Keďže počet ľudí môže len ubúdať, tým môže aj L pre niektorých kanibalov len klesať. Do ďalšieho dňa tak prežijú len kanibali s $L < X_1$. Na to, aby mohol by? v druhý de? niekto zjedený musí mať v druhom dni aspoň niekto $L \geq X_2$. Označíme to ako L_k a teda $X_1 > L_k \geq X_2$, z čoho $X_1 > X_2$, čo sme chceli dokázať.

Z posledného pozorovania vyplýva, že v 10. dni je X_{10} najviac jedna. Teda do 11. dňa isto neprežije nikto s $L \geq 1$. Ak nejaký kanibal prežije, tak už ho nebude mať rád nikto. Tým sme sa dostali do sporu s predpokladom, že v 11. dni ešte niekoho zjedia. Dokázali sme teda, že v 11. dni isto nikoho nezjedia, a teda nemôžu jesť ani v dňoch nasledujúcich po 11. októbri, čo bolo úlohou dokázať.

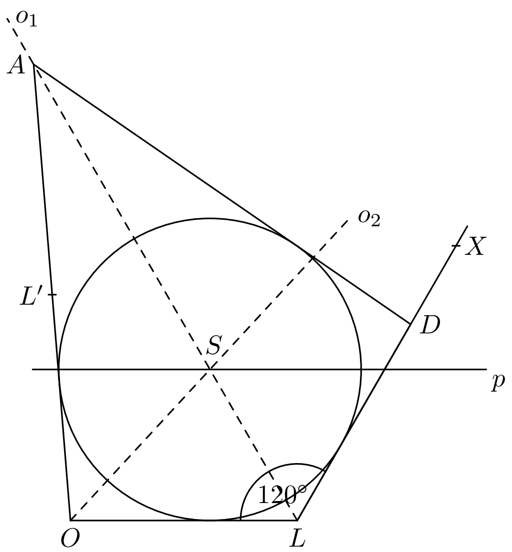
Komentár: Niektorí z vás pochopili zadanie v zmysle, že prvý deň bol zjedený práve jeden kanibal. Zadanie ale hovorilo skôr o tom, kedy sa začali kanibali požierať. Pozorovanie č. 1 ste odhalili skoro všetci, väčší problém ste mali s dôkazom pozorovania č. 2. Tam ste sa častokrát dopustili nepresností, ktoré znížili vaše bodové ohodnotenie.

2. Zostrojte štvoruholník $OLDA$, do ktorého sa dá vpísať kružnica s polomerom 4 cm. Navyše viete, že strana OL je dlhá 6 cm, veľkosť uhla OLD je 120° a vrchol A leží na osi uhla OLD. Vedeli by ste ho zostrojiť aj v tom prípade, ak by strana OL bola dlhá 18 cm?

Opravovali: Janka Baranová a Marek Derňár **Počet riešiteľov: 44**

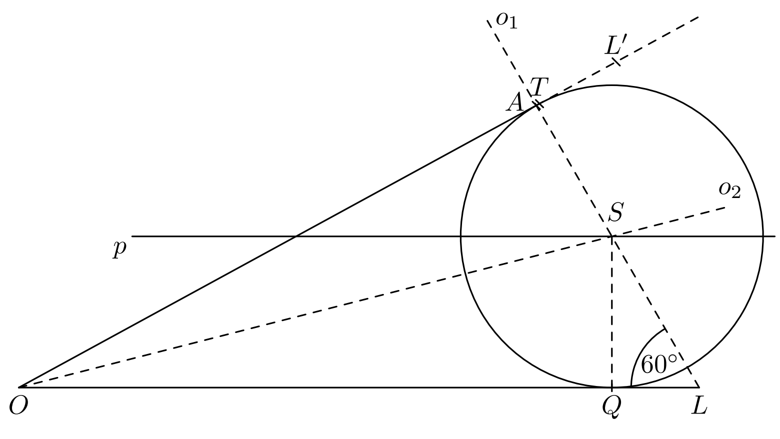
Riešenie:

Keďže ide o geometrickú úlohu, tak by bolo vhodné si hneď na začiatku načrtnúť obrázok. Ide o konštrukčnú geometrickú úlohu, teda riešenie musí obsahovať aj jej význačné časti – t.j. náčrt, rozbor úlohy (resp. dôkaz správnosti konštrukcie), postup konštrukcie, už menej podstatná samotná konštrukcia a diskusia o počte riešení. Začneme teda náčrtom:



Pokračujeme ďalej akýmsi rozborom úlohy. Keďže vieme, že $|OL| = 6\,\text{cm}$, tak známe body sú pre nás O a L. Neznáme a potrebné body sú D, A a S, pričom bod S je stred vpísanej kružnice štvoruholníka $OLDA$. Keďže S je stred vpísanej kružnice, tak leží na prieniku osí vnútorných uhlov štvoruholníka a teda leží niekde aj na osi uhla OLD – označíme o_1. Ďalej, čo o tomto strede môžeme povedať je, že jeho vzdialenosť od priamky OL (známa) je $4\,\text{cm}$ (OL je dotyčnica ku vpísanej kružnici so stredom v bode S a polomerom $4\,\text{cm}$). Stred S preto leží na množine všetkých bodov vzdialených od priamky OL o $4\,\text{cm}$, čo je priamka rovnobežná – označíme ju p. Z tohto teda máme, že stred S dostaneme ako prienik priamky p a osi uhla OLD – polpriamky o_1. Vieme už zostrojiť stred vpísanej kružnice, teda aj kružnicu samotnú.
Teraz bod A – vieme, že leží na o_1 a taktiež, že OA je dotyčnica. Keďže OA a OL sú dotyčnice k vpísanej kružnici, tak sú súmerné podľa OS (osi označenej o_2). Túto os už narysovať vieme, takže stačí podľa nej zobraziť bod L a teda priamka OL' (L' je bod L zobrazený podľa osi o_2) je druhou dotyčnicou prechádzajúcou bodom O. Preto už tiež vieme, že bod A leží na prieniku priamky OL' a o_1.
Bod D dostaneme podobným spôsobom, keďže opäť leží na dotyčnici. OA teda zobrazíme podľa osi SA a máme to. Bod D bude na prieniku tej zobrazenej dotyčnice a polpriamky LX, pričom $|\sphericalangle OLX| = 120°$. Vieme teda skonštruovať všetky vrcholy $OLDA$, čiže prvá časť úlohy je vyriešená. Bolo by ešte fajn dodať, že táto časť úlohy má len jedno riešenie.

Teraz poďme skúmať $|OL| = 18\,\text{cm}$. Väčšina z Vás prišla na to, že s takouto dĺžkou to narysovať nejde, otázkou je ale prečo. Skúsme to teda najprv nakresliť.



Po narysovaní by sa nám mohlo zdať, že A je dotykovým bodom vpísanej kružnice. To však môže byť spôsobené aj nepresnosťou rysovania, teda musíme to nejakým spôsobom dokázať. Označme T dotykový bod vpísanej kružnice a priamky OA a chceme ukázať, že $A \equiv T$. Toto tvrdenie je ekvivalentné s tým, že $|\sphericalangle ASO| = |\sphericalangle TSO|$. Vieme, že trojuholníky OQS a OTS sú zhodné (osová súmernosť podľa OS), teda $|\sphericalangle TSO| = |\sphericalangle QSO|$. Z pravouhlého trojuholníka LQS dostávame, že

$$|QL| = \frac{|SQ|}{\mathrm{tg}\ |\sphericalangle SLQ|} = \frac{4}{\mathrm{tg}\ 60^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\ \mathrm{cm}.$$

Tým pádom $|OQ| = |OL| - |QL| = 18 - \frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm. Z pravouhlého trojuholníka OQS teda vidíme

$$\mathrm{tg}\ |\sphericalangle QSO| = \frac{|OQ|}{|SQ|} = \frac{18 - \frac{4\sqrt{3}}{3}}{4}.$$

Vypočítali sme, že $|\sphericalangle TSO| = |\sphericalangle QSO| > 75^\circ$ (skúste to dokázať bez kalkulačky, t. j. pomocou vyjadrenia presnej hodnoty tg 75°). Na druhej strane

$$|\sphericalangle ASO| = 180^\circ - |\sphericalangle QSO| - |\sphericalangle QSL| < 180^\circ - 75^\circ - 30^\circ = 75^\circ < |\sphericalangle TSO|.$$

Vidíme teda, že $A \not\equiv T$, čiže naša pozorovanie nebolo presné. Ukázali sme však, že $|\sphericalangle ASO| < |\sphericalangle TSO|$, čiže dotykový bod neleží na strane AO (strana myslená ako úsečka AO), čo je zrejme spor s tým, že táto kružnica má byť vpísaná, keďže vpísaná kružnica sa má dotýkať všetkých strán.

Komentár: Prvú časť úlohy malo správne väčšina z Vás, avšak takmer všetci v nej prišli o bod, keďže uviedli iba postup konštrukcie bez akéhokoľvek odôvodnenia. Druhá časť úlohy už bola väčším problémom. Mnohí z Vás tvrdili, že $OLDA$ bude trojuholník (teda $A \equiv T$), čo však nie je pravda. Totižto $OLDA$ bude štvoruholník, ale (tesne) nekonvexný, ktorému sa nedá vpísať kružnica. Rovnako, ako teraz bod T vyšiel tak trošku „napravo“ od A, tak mohol vyjsť aj tesne „naľavo“, a vtedy by sa nám podarilo požadovaný štvoruholník zostrojiť. Takže ponaučenie do budúcna – netreba sa spoliehať na presnosť rysovania, ale pekne všetko dokazovať.

3. Pre kladné reálne čísla a a b platí $a^2 + b^2 = 1$. Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla c a d potom platí $(ac + bd)^2 \le c^2 + d^2$. Pre ktoré čísla c a d nastáva v tejto nerovnosti rovnosť?

Opravovali: Laco Bačo **Počet riešiteľov: 41**

Riešenie:

Zadanú nerovnosť vieme upraviť nasledovne:

$$(ac + bd)^2 \le c^2 + d^2 \tag{1}$$

$$0 \le c^2 + d^2 - (a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2)$$

$$0 \le c^2(1 - a^2) + d^2(1 - b^2) - 2abcd \tag{2}$$

Využijeme väzbu, podľa ktorej je $b^2 = 1 - a^2$ a $a^2 = 1 - b^2$. Rovnaké výrazy sa nám objavujú aj v nerovnosti (2), tak za ne dosadíme b^2, resp. a^2. Teda nerovnosť (2) je za podmienky $a^2 + b^2 = 1$ ekvivalentná s nerovnosťou

$$0 \le c^2b^2 + d^2a^2 - 2abcd$$

$$0 \le (bc - ad)^2 \tag{3}$$

Nerovnosť (3) platí vždy, lebo druhá mocnina reálneho čísla je vždy nezáporná. To ale znamená, že opačným postupom vieme pomocou ekvivalentných úprav a využitím podmienky $a^2 + b^2 = 1$ upraviť vždy platnú nerovnosť (3) na zadanú nerovnosť (1).

Pretože podľa zadania čísla a, b spĺňajú väzbu $a^2 + b^2 = 1$, tak nerovnosť (1) skutočne platí.

Ešte nám ostáva určiť, kedy nastáva rovnosť. Vďaka použitiu iba ekvivalentných úprav nastáva rovnosť v nerovnosti (1) práve vtedy, ak nastane rovnosť aj v nerovnosti (3). [1]

Rovnosť $(bc - ad)^2 = 0$ platí práve vtedy, ak je $|bc - ad| = 0$, teda ak

$$bc = ad. \tag{4}$$

[1] Ak znaky nerovnosti nahradíme znakmi rovnosti, potom vieme s využitím väzby rovnakým spôsobom ukázať $(ac - bd)^2 = c^2 + d^2 \Leftrightarrow 0 = (bc - ad)^2$.

Pretože podľa zadania sú a, $b > 0$, tak $d = \frac{c}{a} \cdot b$. Ak označíme $\frac{c}{a} = k$ ($k \in \mathbb{R}$), potom $c = ka$ a $d = kb$. Skutočne, pre všetky takéto dvojice c, d nastáva v (1) rovnosť, o čom sa ľahko presvedčíme skúškou (zase využijeme väzbu).

<u>Iné riešenie:</u>
Vezmime si vektory (a, b), (c, d) a pozrime sa na ich skalárny súčin:

$$(a, b) \cdot (c, d) = ac + bd = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} \cdot \cos\varphi,$$

kde φ je uhol, ktorý zvierajú naše dva vektory[2], pričom $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$. Keďže $\cos\varphi \leq 1$, tak $\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} \cdot \cos\varphi \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}$ a teda

$$ac + bd \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}. \tag{4}$$

Umocnením nerovnosti (4) a použitím väzby dostávame nerovnosť (1). Rovnosť nastáva, iba ak je $\varphi = 0$ alebo $\varphi = \pi$, teda ak $(c, d) = k(a, b)$. Nerovnosť (4) je špeciálny prípad Cauchy-Schwarzovej nerovnosti platnej pre akékoľvek n-rozmerné vektory reálnych čísel.

Komentár: Viacerí z Vás predpokladali platnosť nerovnosti (1) a z nej došli ku pravdivému tvrdeniu (3), ale to nie je dôkaz platnosti (1). Pri dôkaze postupujeme práve naopak, z platného tvrdenia ukážeme to, čo chceme dokázať, teda postupujeme od nerovnosti (3) k nerovnosti (1).
Tiež niektorí ste správne odvodili podmienku (4) a potom ste prehlásili, že musí platiť $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$, ale nezaoberali ste sa možnosťou $d = 0$. Na takéto úpravy si treba dávať nabudúce pozor :-).

4. Môže mať mocnina dvojky (s prirodzeným exponentom) vo svojom dekadickom zápise (t.j. zápise v desiatkovej sústave) rovnaký počet jednotiek, dvojok, ..., deviatok? Svoje tvrdenie nezabudnite poriadne odôvodniť.

Opravovali: Monča Vaľková a Tomáš Kocák **Počet riešiteľov: 39**
<u>Riešenie:</u>
Ak má mať naše číslo rovnaký počet jednotiek, dvojok, ..., deviatok, povedzme n, tak jeho ciferný súčet bude

$$n \cdot 1 + n \cdot 2 + n \cdot 3 + n \cdot 4 + n \cdot 5 + n \cdot 6 + n \cdot 7 + n \cdot 8 + n \cdot 9 + k \cdot 0 = 45 \cdot n = 3 \cdot 15 \cdot n.$$

Naše číslo teda očividne bude deliteľné trojkou. Zároveň však nesmie byť deliteľné trojkou, pretože je mocninou dvojky, a teda má vo svojom prvočíselnom rozklade iba dvojky a žiadne iné prvočísla. Z tohto sporu nám vyplýva, že takáto mocnina dvojky neexistuje.

Komentár: Túto úlohu ste skoro všetci riešili rovnako dobre, veľmi podobne vzorovému riešeniu, čo spôsobilo, že 95 percent ľudí malo 9 bodov. Len tak ďalej.

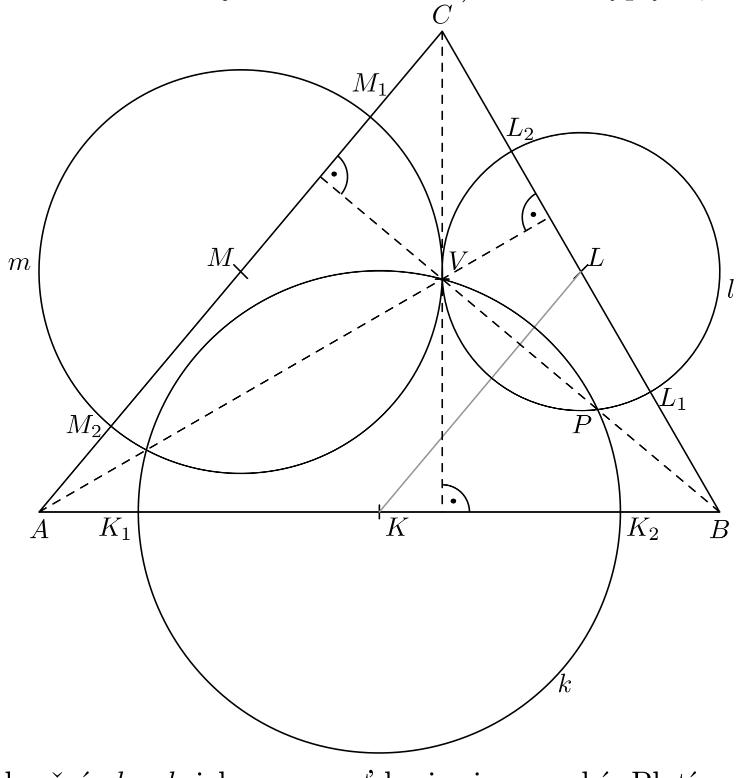
5. Stredy strán AB, BC a CA ostrouhlého trojuholníka ABC označíme postupne K, L a M. Nech kružnice so stredmi v bodoch K, L, M prechádzajúce priesečníkom výšok V trojuholníka ABC pretnú strany trojuholníka (strany ako úsečky) v šiestich bodoch. Dokážte, že potom týchto šesť bodov leží na jednej kružnici.

Opravovali: Robo Tóth a Edo Eiben **Počet riešiteľov: 25**
<u>Riešenie:</u>
Najprv sa zamyslime nad tým, ako ukázať, že nejaké body ležia na kružnici. Jednou možnosťou je nájsť stred a ukázať, že všetky naše body sú od neho vzdialené rovnako (o to sa aj mnoho z vás pokúsilo). Ďalšou je použiť vetu o obvodovom a stredovom uhle alebo hľadať tetivové štvoruholníky. Tou najvhodnejšou metódou však pre túto úlohu je použiť mocnosť bodu ku kružnici a vlastnosti

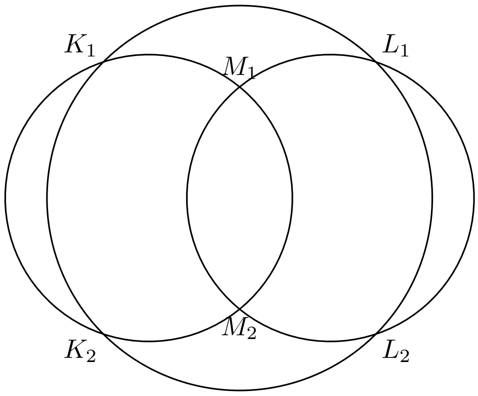
[2] Ak je vektor (c, d) nulový, tak $\varphi = 0$.

chordály (rozlíšiť, ktorá metóda je najlepšia, si mnohokrát vyžaduje mnoho skúseností). Chordála a mocnosť bodu ku kružnici sa dajú využiť v mnohých úlohách z geometrie. Podrobnejšie sa o nich môžete dozvedieť na `http://geometrie.kma.zcu.cz/work/AU/teorie/mocnost.html`.

Označme kružnice prislúchajúce jednotlivým stredom K, L a M postupne k, l a m. Ďalej označme priesečníky k, l, m so stranami trojuholníka postupne K_1, K_2, L_1, L_2, M_1 a M_2. Potom kružnice k a l sa pretínajú v bodoch V (ortocentrum) a P (tak označíme druhý priesečník).
Teraz, keď už máme všetko pooznačované, vyberieme štyri body, napríklad K_1, K_2, L_1 a L_2. Ak sme sa rozhodli použiť mocnosť, tak teraz nastal čas, aby sme vybrali bod, vzhľadom na ktorý budeme túto mocnosť počítať. Ako stvorený pre túto rolu sa ukazuje bod B, pretože je to bod na priesečníku priamok K_1K_2 a L_1L_2, čo pre nás znamená, že do obrázka nemusíme kresliť žiadne nové body ani tetivy – použijeme tetivy K_1K_2 a L_1L_2. Stačí teda spočítať súčin $|BK_2| \cdot |BK_1|$ a súčin $|BL_1| \cdot |BL_2|$, ktoré by mali vyjsť rovnaké. Možno ešte lepšie je využiť takýto tvar mocnosti bodu ku kružnici: $|BK|^2 -$ (polomer kružnice k)^2, pričom $|BK|$ poznáme a polomer je $|VK|$. Existuje mnoho spôsobov, ako pomocou tejto myšlienky túto úlohu vyriešiť – napríklad pomocou trigonometrie alebo Pytagorových viet vypočítame dĺžku úsečky $|VK|$.
V tomto vzorovom riešení by sme však uviedli ešte elegantnejšie riešenie, a to za využitia chordál, t. j. množiny bodov, ktorá obsahuje všetky body s rovnakou mocnosťou k dvom kružniciam. Pozrime sa preto bližšie na priamku VP. Priamka VP je chordálou kružníc k a l, teda je kolmá na spojnicu ich stredov K a L. Úsečka KL je ale rovnobežná s CA (keďže je to stredná priečka trojuholníka ABC), preto je VP kolmá aj na CA. To ale potom znamená, že VP je výškou na stranu CA (je to priamka kolmá na stranu CA a obsahuje ortocentrum V). Z toho vyplýva, že bod B leží na VP.



Keďže leží na chordále kružníc k a l, jeho mocnosť k nim je rovnaká. Platí preto, že $|BK_2| \cdot |BK_1| = |BL_1| \cdot |BL_2|$. Z toho už potom podľa vety o mocnosti bodu ku kružnici vyplýva, že K_1, K_2, L_1 a L_2 ležia na jednej kružnici. Keďže úloha je symetrická, analogicky sa dá ukázať, že aj L_1, L_2, M_1 a M_2 ležia na jednej kružnici a že aj M_1, M_2, K_1 a K_2 ležia na jednej kružnici. To však ešte neznamená, že musí na jednej kružnici ležať všetkých šesť týchto bodov. Protipríklad:



Najjednoduchší spôsob, ako ukázať, že týmto trom štvoriciam bodov sú opísané rovnaké kružnice, je nájsť ich spoločný stred. Pozrime sa napr. na štvoricu L_1, L_2, M_1 a M_2. Stred kružnice opísanej týmto štyrom bodom je rovnako vzdialený od bodov L_1 a L_2. Leží teda na osi úsečky L_1L_2. Keďže L je stred BC, tak táto os je však aj osou úsečky BC, teda stred tejto kružnice leží na osi BC. Rovnako sa dá ukázať, že leží aj na osi CA. Lenže tieto dve osi sa pretínajú v strede kružnice opísanej trojuholníku ABC.
Rovnakou úvahou pre zvyšné dve kružnice dostaneme, že stredom každej z nich je stred kružnice opísanej trojuholníku ABC – priesečník osí všetkých strán. Teda tieto tri kružnice sú totožné a body K_1, K_2, L_1, L_2, M_1 a M_2 ležia na jednej kružnici.

6. Pre ktoré kladné celé čísla n existuje polynóm P stupňa n s reálnymi koeficientmi taký, že

$$P(0), P(1), P(2), \ldots, P(n-1), P(n+1), P(n+2), P(n+3)$$

sú celé čísla a $P(n)$ nie je celé číslo?

Opravovali: Tomáš Kocák **Počet riešiteľov: 3**

Riešenie:

K tejto úlohe sa dá pristupovať niekoľkými spôsobmi. Prvá z možností, a taktiež aj najviac prirodzená, je skúšanie malých prípadov. Ďalšia z možností je povedať si, že taký polynóm, ktorý by spĺňal zadanie neexistuje pre žiadne n a skúsiť to dokázať napríklad indukciou. Posledná z možností, ktoré sa nám núkajú je povedať si, že taký polynóm existuje a skúsiť ho nájsť.

Na začiatok sa teda pozrime na niektoré malé prípady. Ak sa pokúsime nájsť polynóm stupňa $n = 1$, ktorý spĺňa podmienky zo zadania, nepodarí sa nám to. Dokonca ani nie je ťažké overiť, že to pre $n = 1$ nepôjde nikdy. Skúste si to.

Pozrime sa teda na ďalší prípad. Pre $n = 2$ už nie je na prvý pohľad vidno, či polynóm s danými vlastnosťami existuje. Skúsme teda napísať, čo pre náš polynóm platí. Náš polynóm P sa dá napísať ako

$$P(x) = ax^2 + bx + c.$$

Vieme, že $P(0)$, $P(1)$, $P(3)$, $P(4)$, $P(5)$ sú celé čísla. Keď dosadíme do polynómu jednotlivé hodnoty, dostaneme

$$\begin{aligned}
P(0) &= c \in \mathbb{Z}, \\
P(1) &= a + b + c \in \mathbb{Z}, \\
P(2) &= 4a + 2b + c, \\
P(3) &= 9a + 3b + c \in \mathbb{Z}, \\
P(4) &= 16a + 4b + c \in \mathbb{Z}, \\
P(5) &= 25a + 5b + c \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Teraz chceme niečo zistiť o $P(2)$. Vieme, že $P(0)$ je celé číslo, teda c je celé číslo. Preto môžeme c odčítať od ostatných rovníc a nezmení sa nám celočíselnosť, pretože rozdiel dvoch celých čísel je opäť celé číslo a taktiež ak $P(2)$ nebolo celé číslo, tak sa nestane celým ani po odčítaní c. Po úprave dostaneme rovnosti:

$$\begin{aligned} P(1) &= a+b \in \mathbb{Z}, \\ P(2) &= 4a+2b, \\ P(3) &= 9a+3b \in \mathbb{Z}, \\ P(4) &= 16a+4b \in \mathbb{Z}, \\ P(5) &= 25a+5b \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Opäť môžeme našu úvahu zopakovať. Vieme, že $P(1)$ je celé číslo a preto môžeme odčítať celočíselný násobok $P(1)$ od ostatných rovníc tak, aby sme sa zbavili neznámych b a dostaneme

$$\begin{aligned} P(2) &= 2a, & (1) \\ P(3) &= 6a \in \mathbb{Z}, & (2) \\ P(4) &= 12a \in \mathbb{Z}, & (3) \\ P(5) &= 20a \in \mathbb{Z}. & (4) \end{aligned}$$

Teraz je už ľahko vidno, že vhodnou kombináciou (2), (3) a (4) sa vieme dostať k (1) a preto aj $P(2)$ je celé číslo. Teda náš záver je, že neexistuje polynóm stupňa 2, ktorý by spĺňal podmienky zo zadania.

Pre $n = 1$ a $n = 2$ sme dostali, že polynómy s danou vlastnosťou neexistujú. Môžeme preto usúdiť, že také polynómy nebudú existovať. Ak sa to ale chvíľu pokúsime dokazovať, zistíme, že to asi nepôjde tak ľahko. Ak sa vrátime k overovaniu malých prípadov, tak zistíme, že už pre $n = 3$ a $n = 4$ nám postup využitý pre $n = 2$ nepostačí, avšak pre $n = 5$ bude opäť fungovať. Skúste si to. Dokonca ak sa chvíľu pohráme, tak sa dá nájsť nejaký polynóm tretieho stupňa, ktorý spĺňa podmienky zo zadania, napríklad $\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$.

Keďže nám veľmi nepomohlo pozrieť sa na malé prípady (neobjavila sa nijaká očividná závislosť) a ani sa nedá dokázať, že neexistuje daný polynóm pre žiadne n, takže nám ostáva už len posledná možnosť. Skúsiť daný polynóm skonštruovať. Problém je, že nevieme, ako by mal tento polynóm vyzerať. Skúsme si preto trošku uľahčiť život a vytvorme taký polynóm, ktorý má čo najviac celočíselných hodnôt zo zadania nulových. Teda nech má korene v bodoch 0, 1, 2, ... Nemôže ale mať korene vo všetkých bodoch $0, \ldots, n-1, n+1, n+2$ a $n+3$, pretože potom by mal príliš veľký stupeň, preto vezmime len prvých n bodov. Dostaneme polynóm:

$$P(x) = (x-0)(x-1)\ldots(x-(n-1)).$$

Tento polynóm má len celočíselné hodnoty pre celočíselné argumenty, takže potrebujeme ešte zabezpečiť, aby v bode n nemal celočíselnú hodnotu. To by sa dalo docieliť, keby sme predelili $P(x)$ dosť veľkým číslom. Pozrime sa preto, čomu sa rovná $P(x)$ v bodoch n, $n+1$, $n+2$ a $n+3$, aby sme sa vedeli rozhodnúť, akým číslom chceme $P(x)$ predeliť.

$$\begin{aligned} P(n) &= n! \\ P(n+1) &= (n+1)! \\ P(n+2) &= \frac{1}{2}(n+2)! \\ P(n+3) &= \frac{1}{6}(n+3)! \end{aligned}$$

Tu sa už dá ľahko odpozorovať, že ak by sme $P(x)$ prenásobili číslom $\frac{6}{(n+1)!}$, tak hodnoty v $n+1$, $n+2$ a $n+3$ by boli celočíselné a hodnota v bode n by bola $\frac{6}{n+1}$, čo nie je celé číslo pre všetky n

okrem 1, 2 a 5. Už vieme, že pre n rovné 1, 2 alebo 5 polynóm s danými vlastnosťami neexistuje, takže úlohu už máme vyriešenú.

Teda záver je, že pre n rovné 1, 2 a 5 taký polynóm neexistuje a pre ostatné prirodzené čísla n polynóm

$$P(x) = \frac{6}{(n+1)!}(x-0)(x-1)\dots(x-(n-1))$$

spĺňa podmienky zo zadania.

Komentár: V tejto úlohe sa ukázalo, že niekedy je najlepšie skúsiť si niektoré malé prípady a potom vymyslieť všeobecné riešenie. Niekedy totiž čiastočné riešenia, alebo riešenia pre malé prípady nemusia byť ďaleko od úplného riešenia. Preto je niekedy lepšie poslať aj čiastočné riešenie, za ktoré môžu byť aj nejaké body a môže dopomôcť k riešeniu.

Konečné poradie Zimného semestra 35. ročníka

P.	Meno a priezvisko	Trieda	Škola	S	1.	2.	3.	4.	5.	6.	B	CS
1.	Martin Vodička	Sexta	GAlejKE	46	9	9	9	9	9	-	9	100
	Štěpán Šimsa	Sexta	GJJLit	50	9	7	9	9	9	-	7	100
3.	Klára Ficková	3. A	GPoštKE	54	9	9	9	9	9	-	0	99
4.	Katarína Krajčiová	Kvarta	GAlejKE	43	9	9	9	9	9	-	9	97
5.	Tomáš Babej	4. A	GPoštKE	50	9	8	9	9	8	3	0	96
6.	Miroslav Stankovič	1. A	GPoštKE	47	6	7	8	9	7	-	9	93
7.	Jakub Šafin	2. G	GMasaMI	45	9	6	8	9	8	-	6	91
8.	Matúš Stehlík	Oktáva	GAlejKE	45	9	9	8	9	9	1	0	90
9.	Viktor Szabados	4. B	GGrösBA	46	9	9	8	9	-	-	0	81
10.	Martin Rapavý	Kvinta A	GAlejKE	30	9	6	8	9	9	-	9	80
11.	Ľudmila Šimková	Kvinta	GPároNR	42	9	5	8	-	2	-	9	75
12.	Dáša Krasnayová	Oktáva	GAlejKE	41	6	4	3	9	9	-	0	72
13.	Dávid Hvizdoš	4. A	GPoštKE	46	9	7	-	9	-	-	1	71
14.	Peter Milošovič	4. A	GPoštKE	47	6	-	8	9	-	-	0	70
	Michal Kopf	3. A	GSlezCZ	32	9	9	7	9	4	-	0	70
16.	Lucia Magurová	2. A	GPoštKE	36	9	9	8	-	7	-	0	69
17.	Daniel Till	3. A	GPoštKE	36	7	4	8	9	2	-	0	66
18.	Monika Zlaczka	4. A	GPoštKE	34	5	7	8	9	2	-	0	65
19.	Kristína Faguľová	3. A	GPoštKE	35	7	3	9	9	-	-	0	63
20.	Ján Jursa	1. A	GPoštKE	40	-	4	-	9	-	-	9	62
	Ivana Gašková	Septima	GAlejKE	29	9	9	4	9	2	-	0	62
22.	Alena Bušáková	8. V	GSpitCZ	29	6	8	8	9	-	-	0	60
	Viktor Lukáček	3. C	GŠevčPO	27	9	7	6	9	2	-	0	60
24.	Martina Hlavatá	Oktáva	GGrösBA	29	2	8	8	9	2	-	0	58
	Denisa Múthová	4. A	GRužiŽA	28	9	4	8	9	-	-	0	58
26.	Dorota Jarošová	Kvarta	GAlejKE	29	6	4	0	9	-	-	9	57
	Zuzana Baxová	3. E	G1májTN	32	8	-	8	9	-	-	0	57
28.	Miloslav Homer	3. A	GPoštKE	32	8	8	8	-	-	-	0	56
	Pavol Koprda	7. OA	GHvieTT	28	7	4	8	9	-	-	0	56
30.	Denisa Semanišinová	Sexta	GAlejKE	29	3	6	8	9	-	-	0	55
	Ján Hoffmann	Oktáva	GAlejKE	24	6	9	5	9	2	-	0	55
32.	Vladislav Vancák	Kvinta B	GAlejKE	23	6	5	-	9	-	-	9	52
33.	Martina Bekrová	8. Y	GTrutCZ	20	6	7	9	9	-	-	0	51
	Magdaléna Krejčíová	1. E	GTataPP	20	6	7	-	9	-	-	9	51
35.	Viktória Valachová	1. A	GŠkolSN	16	8	9	6	-	-	-	9	48
	Matúš Hlaváčik	Sexta	GAlejKE	19	8	6	6	9	-	-	0	48
37.	Radka Masloviaková	Oktáva	GAlejKE	21	6	-	8	9	2	-	0	46
38.	Jaroslav Petrucha	Sexta	GMetoBA	21	6	-	9	9	-	-	0	45
39.	Irena Bačinská	5. Q	GKomeLY	21	6	4	2	-	2	1	6	42
	Ladislav Hovan	4. A	GExnáKE	16	-	9	8	9	-	-	0	42
41.	Ján Dudič	2. A	GPoštKE	18	6	7	1	9	-	-	0	41
42.	Martina Oravcová	1. A	GPoštKE	23	-	4	-	-	2	-	4	33
	Matúš Porázik	Kvinta A	GAlejKE	15	-	6	6	-	0	-	6	33
	Vladimír Macko	2. A	GHronZV	24	-	-	-	9	-	-	0	33

P.	Meno a priezvisko	Trieda	Škola	S	1.	2.	3.	4.	5.	6.	B	CS
45.	Jakub Dargaj	1. A	GPoštKE	32	-	-	-	-	-	-	0	32
	Anton Gromóczki	9. A	ZStanKE	24	-	4	-	-	-	-	4	32
47.	Ludmila Jankovichová	1. F	GTajoBB	30	-	-	-	-	-	-	0	30
48.	Barbora Marečáková	Septima	GKukuPP	0	5	5	8	9	-	-	0	27
49.	Daniel Ondra	1. A	GPoštKE	26	-	-	-	-	-	-	0	26
50.	Michaela Belanová	Septima	GTeplBA	12	9	-	-	-	-	-	0	21
51.	Roman Pivovarník	5. OA	GMudrPO	20	-	-	-	-	-	-	0	20
52.	Tomáš Macko	2. A	GPoštKE	10	9	-	-	-	-	-	0	19
53.	Daniela Harčarufková	3. A	GPoštKE	18	-	-	-	-	-	-	0	18
54.	Marcel Frančák	2. B	GMierNO	3	-	4	6	-	1	-	0	14
	Martin Perešíni	1. A	PM. HBB	2	1	5	0	0	1	-	5	14
56.	Róbert Solárik	2. A	GPoštKE	11	-	-	-	-	-	-	0	11
57.	Alžbeta Bohiniková	Oktáva	GGrösBA	10	-	-	-	-	-	-	0	10
	Lea Uhliarová	2. L	GTajoBB	10	-	-	-	-	-	-	0	10
59.	Lucia Floriánová	1. A	GPoštKE	9	-	-	-	-	-	-	0	9
60.	Alica Ordošová	1. A	GPoštKE	5	-	1	0	-	-	-	1	7
	Lucia Čabrová	2. A	GPoštKE	7	-	-	-	-	-	-	0	7
62.	Veronika Koľveková	3. A	GPoštKE	4	-	-	-	-	-	-	0	4
63.	Ivana Sopatová	2. A	GPoštKE	2	-	-	-	-	-	-	0	2
64.	Marcel Česelka	2. C	GŠkulKE	1	-	-	-	-	-	-	0	1

Pohár konštruktérov Zimného semestra 35. ročníka

P.	Skratka	Škola	P.r.	Body
1.	GPoštKE	Gymnázium Poštová 9 042 52 Košice	23	1019
2.	GAlejKE	Gymnázium Alejová 1 041 49 Košice	13	842
3.	GGrösBA	Gymnázium Grösslingova 18 811 09 Bratislava 1	3	149
4.	GJJLit	Gymnázium Josefa Jungmanna Svojsíkova 1 412 65 Litoměřice	1	100
5.	GMasaMI	Gymnázium Pavla Horova Masarykova 1 071 79 Michalovce	1	91
6.	GPároNR	Gymnázium Párovská 1 950 50 Nitra	1	75
7.	GSlezCZ	Slezské Gymnázium Zámecký okruh 29 746 01 Opava	1	70
8.	GSpitCZ	Gymnázium Špitálská 2 192 00 Praha 9	1	60
	GŠevčPO	Gymnázium sv. Moniky Tarasa Ševčenka 1 080 01 Prešov	1	60
10.	GRužiŽA	Gymnázium bilingválne T. Ružičku 3 010 01 Žilina	1	58
11.	G1májTN	Gymnázium 1. mája 2 911 01 Trenčín	1	57
12.	GHvieTT	Gymnázium Angely Merici Hviezdoslavova 10 917 01 Trnava	1	56
13.	GTataPP	Gymnázium Dominika Tatarku 14 058 19 Poprad	1	51
	GTrutCZ	Gymnazium Jiráskovo náměsti 325 541 01 Trutnov	1	51
15.	GŠkolSN	Gymnázium Školská 7 052 01 Spišská Nová Ves	1	48
16.	GMetoBA	Gymnázium Metodova 2 821 08 Bratislava 2	1	45
17.	GExnáKE	Gymnázium Exnárova 10 040 22 Košice	1	42
	GKomeLY	Gymnázium Komenského 13 082 71 Lipany	1	42
19.	GTajoBB	Gymnázium J. G. Tajovského 25 974 01 Banská Bystrica	2	40
20.	GHronZV	Gymnázium Hronská 1467/3 960 01 Zvolen	1	33
21.	ZStanKE	Základná škola Staničná 13 040 01 Košice	1	32
22.	GKukuPP	Gymnázium Kukučínova 058 39 Poprad	1	27
23.	GTeplBA	Gymnázium Teplická 7 831 02 Bratislava 3	1	21
24.	GMudrPO	Gymnázium J. A. Raymana Mudroňova 20 080 01 Prešov	1	20
25.	PM. HBB	SPŠ J. Murgaša M. Hurbana 6 975 18 Banská Bystrica	1	14
	GMierNO	Gymnázium A. Bernoláka Mieru 307/23 029 01 Námestovo	1	14
27.	GŠkulKE	Evanjelické gymnázium Škultétyho 10 040 01 Košice	1	1

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

- Jednote slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice
- Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach
- Agentúre na podporu výskumu a vývoja prostredníctvom projektu:
  LPP-0057-09 Rozvíjanie talentu prostredníctvom korešpondenčných seminárov a súťaží

Názov **STROM** – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 3 • December 2010 • Zimný semester 35. ročníka (2010/2011)
Internet: `http://seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet: `http://www.strom.sk`
E-mail: `zdruzenie@strom.sk`