Ahojte Stromáci!

Vaše riešenia precestovali celé Slovensko a niektoré si spravili aj výlet do zahraničia, no teraz sú späť a vyžadujú si vašu pozornosť. Chcú, aby ste pozorne preskúmali, koľko bodov (a hlasov) vám získali, a aby ste potom vykonali adekvátnu akciu. Oslava plná sľubov, že nepoľavíte, či hodinka sebareflexie, počas ktorej sa zaprisaháte, že nabudúce bude prvé miesto patriť vám, je to na vás. Každopádne ale nezabudnite na ďalšiu sériu a poriadne si prečítajte vzorové riešenia tej poslednej. A držte sa!

Vaši **STROM**isti

Veľkonočný výlet

Aj tento rok vám ponúkame možnosť utiecť pred tradičným rodinným sviatkom, počas ktorého mládenci nespravodlivo zarábajú a dievky žmýkajú svoje premočené šatstvo. 21.4.2014 sa preto niekde stretneme a niekam vyrazíme! Podrobnejšie informácie sa časom objavia aj na http://www.strom.sk/vylety/. Zatiaľ vám vieme povedať len toľko, že na výlete bude možné stretnúť aspoň jedného zo STROMáckych vedúcich a bude sa hľadať legendárny duch Veľkej noci.

Tešíme sa na teba! **STROM**isti

2 Druhá séria

Termín odoslania riešení: **5. 5. 2014**

Pozor!!! V úlohách číslo 2 a 5 v druhej sérii zase raz zaúradoval stromácky škriatok. Tentokrát to bol Pišta. Preto uvádzame pôvodné, neporušené zadania, ktoré sú k dispozícii aj na stránke nášho seminára.

2. Nájdite najväčšie trojciferné číslo deliteľné 11, ktorého súčin cifier je piata mocnina celého kladného čísla.

5. Nech n je prirodzené číslo. Ďalej uvažujme len postupnsti dĺžky $2n+2$ zložené len z núl a jednotiek. Nájdite najmenšie prirodzené číslo k, pre ktoré vieme vybrať k *vyvolených* postupností takých, že každá postupnosť sa zhoduje s nejakou vyvolenou na aspoň $n+2$ pozíciách.

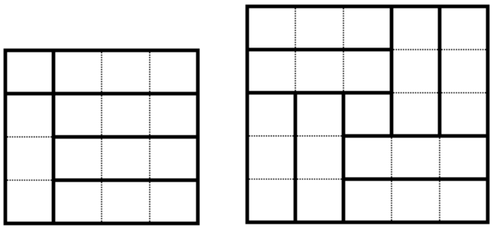
Riešenia 1. série úloh Letného semestra 38. ročníka

1. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n > 3$, ktoré je nedeliteľné 3, platí, že šachovnicu $n \times n$ je možné rozrezať na jeden štvorec 1×1 a obdĺžniky 3×1.

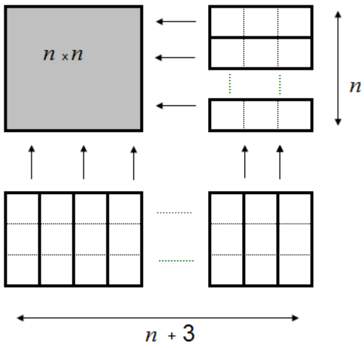
Opravovali: Lucka Magurová a Jozef Lelič **Počet riešiteľov: 50**

Riešenie:

Na začiatku si ukážeme príklad riešenia pre $n = 4$ a $n = 5$:



Ak máme rozrezanú šachovnicu s rozmermi $n \times n$, vieme vytvoriť aj rozrezanú šachovnicu s rozmermi $(n+3) \times (n+3)$, napríklad tak, že k našej šachovnici pridáme sprava stĺpec zložený z n obdĺžnikov 3×1



a zdola riadok skladajúci sa z $n+3$ obdĺžnikov 1×3:

Takto vieme vytvoriť šachovnice s rozmerom $4 + 3k$ a $5 + 3k$, respektíve $1 + 3k$ a $2 + 3k$ ($k \in \mathbb{N}$), čo sú všetky čísla nedeliteľné tromi a väčšie ako 3.

Komentár: Väčšina z vás si s úlohou hravo poradila. Najčastejší omyl nastával pri podmienke, že ak sa útvar dá rozdeliť na obdĺžniky 3×1, musí mať počet políčok deliteľný tromi. Táto podmienka je nutná, avšak nie postačujúca; teda ak útvar nemá počet políčok deliteľný tromi, *nemôže* sa dať rozrezať na obdĺžniky 3×1, no ak má počet políčok deliteľný tromi, potom sa *môže*, ale *nemusí* dať takto rozrezať.

2. Majme štvoruholník $ABCD$, ktorého uhlopriečky sa pretínajú v bode E a uhlopriečku AC rozdeľujú body E, S a R na 4 rovnako dlhé úseky ($|AE| = |ES| = |SR| = |RC| = \frac{1}{4}|AC|$). Obdobne uhlopriečku BD rozdeľujú body Q, P a E na 4 rovnako dlhé úseky ($|BQ| = |QP| = |PE| = |ED| = \frac{1}{4}|BD|$). Určte pomer obsahov štvoruholníkov $ABCD$ a $PQRS$.

Opravovali: Janka Baranová a Rišo Trembecký **Počet riešiteľov: 47**

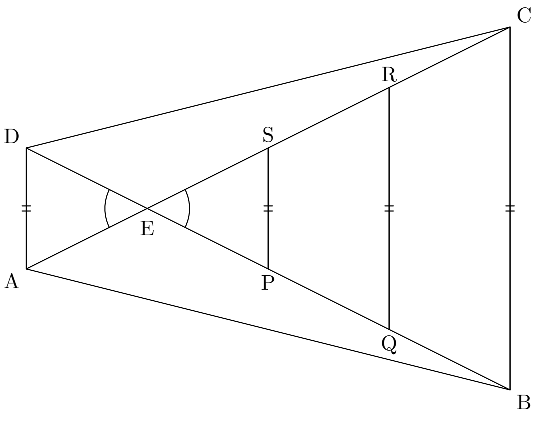
Riešenie:

Majme dva trojuholníky: prvý so stranou a_1 a príslušnou výškou v_1, druhý so stranou a_2 a príslušnou výškou v_2. Pomer ich obsahov je potom:

$$\frac{\frac{a_1 \cdot v_1}{2}}{\frac{a_2 \cdot v_2}{2}} = \frac{a_1 \cdot v_1}{a_2 \cdot v_2} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{v_1}{v_2} \qquad (\bigstar)$$

Tvrdenie ($\bigstar$) ešte párkrát využijeme.

Nech obsah trojuholníka AED je 1 (ak sa s tým neviete stotožniť, tak si predstavte, že sme si zaviedli nové jednotky, v ktorých je jeho obsah 1). Pozrime sa na trojuholníky DEC a AED a skúsme určiť pomer ich obsahov podľa ($\bigstar$). Za strany a_1 a a_2 vezmeme EC a AE, za výšky v_1 a v_2 vezmeme vzdialenosť bodu D od EC, resp. AE (je to tá istá, keďže EC a AE ležia na jednej priamke, teda $v_1 = v_2$). Zo zadania vyplýva $\frac{|EC|}{|AE|} = 3$, a keďže vieme, že $\frac{v_1}{v_2} = 1$, tak pomer obsahov trojuholníkov DEC a AED je $3 \cdot 1 = 3$, z čoho obsah trojuholníka DEC je tiež 3.



Analogicky postupujeme pri určení obsahu trojuholníka ABE, kde nám pomôže pomer obsahov AEB a AED. Strany EB a DE sú zo zadania v pomere $\frac{|EB|}{|DE|} = 3$ a ich vzdialenosť od A poslúži ako zhodné výšky, teda $\frac{v_1}{v_2} = 1$. Podľa ($\bigstar$) je pomer obsahov týchto trojuholníkov $3 \cdot 1 = 3$, z čoho obsah trojuholníka AEB je tiež 3.

Postup zopakujeme pri určení obsahu trojuholníka EBC pomocou obsahu trojuholníka DEC. $\frac{|DE|}{|EB|} = 3$

a ako výšky použijeme vzdialenosť C od DE a EB, pomer výšok je znovu 1. Pomer obsahov podľa (★) je potom $3 \cdot 1 = 3$, z čoho obsah trojuholníka AEB je $3 \cdot 3 = 9$.

Určili sme zatiaľ obsahy štyroch častí štvoruholníka $ABCD$, ktoré nám súčtom $1 + 3 + 3 + 9 = 16$ dávajú jeho obsah. Potrebujeme ešte stále určiť obsah štvoruholníka $PQRS$.

Vieme pokračovať takýmto vyjadrovaním obsahov a dorátať to len pomocou tohto princípu, teda skrátiť postupne jednu a potom druhú stranu trojuholníka EBC na $\frac{2}{3}$ a $\frac{1}{3}$, čím dostaneme trojuholníky EQR s obsahom $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 9 = 4$ a EPS s obsahom $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 9 = 1$, z čoho triviálne obsah štvoruholníka $PQRS$ je $4 - 1 = 3$.

Posledné rátanie obsahov pomocou skracovania strán vieme nahradiť aj napríklad týmto postupom:

$\triangle AED \cong$ (je zhodný s) $\triangle SEP$ podľa vety sus ($|AE| = |SE|$, $|ED| = |EP|$ a $|\sphericalangle AED| = |\sphericalangle SEP|$ (vrcholové uhly)), teda hneď vieme, že obsah trojuholníka EPS je takisto 1. Keďže úsečka PS je strednou priečkou v trojuholníku EQR a vieme, že stredné priečky vyčleňujú z trojuholníka štvrtiny obsahu, máme z toho priamo obsah trojuholníka EQR veľkosti 4. Obsah štvoruholníka je teda rozdiel obsahov trojuholníkov EQR a EPS, čo je $4 - 1 = 3$.

Pomer obsahov štvoruholníkov $PQRS : ABCD$ je $3 : 16$.

Komentár: Existuje niekoľko ciest, ako riešiť túto úlohu, väčšina z vás si vybrala cestu podobnosti trojuholníkov AED, EPS, EQR a EBC, odkiaľ ste správne vyvodili rovnobežnosť AD, PS, QR a BC, a teda že štvoruholníky $ABCD$ a $PQRS$ sú lichobežníky, na ktorých obsahy poznáme vzorce (do tých ešte bolo treba dosadiť správne hodnoty vyplývajúce z pomerov). Najčastejšie ste stratili body na tom, že ste nejaký krok veľmi slabo alebo vôbec neodôvodnili, prípadne ste pri ukázaní podobnosti len napísali vetu sus, ale vtedy treba dbať na označenie vrcholov trojuholníkov v správnom poradí.

3. Nech pre kladné reálne čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ platí, že súčet ich druhých mocnín je z^2. Dokážte, že súčet ich tretích mocnín je nanajvýš z^3.

Opravovali: Ivka Gašková a Martin Vodička **Počet riešiteľov: 29**
Riešenie:

Zrejme platí $a_i^2 \leq a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = z^2$ pre ľubovoľné i. Keďže a_i aj z sú kladné, môžeme predošlú rovnosť odmocniť. Teda $a_i \leq z$. Potom však $a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3 \leq za_1^2 + za_2^2 + \cdots + za_n^2 = z(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) = z^3$. Tým je naša nerovnosť dokázaná.

Komentár: V zadaní sa vyskytla chybička a zabudli sme napísať, že z je kladné. Pre záporné z tvrdenie neplatí a tí, ktorí si to všimli, majú u nás imaginárny bod. Inak bola úloha ľahká, a tak ste ju dobre zvládli.

4. Nájdite všetky prirodzené čísla a, b, pre ktoré platí $a + b + D(a, b) + n(a, b) = 50$, pričom $D(a, b)$ označuje najväčšieho spoločného deliteľa a $n(a, b)$ najmenší spoločný násobok čísel a a b.

Opravoval: Matúš Stehlík **Počet riešiteľov: 34**
Riešenie:

Označme $x = a/D(a, b)$ a $y = b/D(a, b)$, sú to prirodzené čísla, lebo $D(a, b)$ je deliteľom a aj b. Využijeme známy vzťah $ab = D(a, b) \cdot n(a, b)$. Jeho platnosť vidno z prvočíselného rozkladu čísel $a, b, D(a, b)$ a $n(a, b)$, alebo sa dá najprv dokázať pre nesúdeliteľné a, b a potom skúmať, čo sa deje so spoločnými deliteľmi. Ak ste uvedenú identitu ešte nikdy nevideli, skúste si ju dokázať.

Teda $n(a, b) = xyD(a, b)$, dosadíme do rovnice zo zadania a upravujeme

$$\begin{aligned}
a + b + D(a,b) + xyD(a,b) &= 50 \\
D(a,b)x + D(a,b)y + D(a,b) + xyD(a,b) &= 50 \\
D(a,b)(x + y + 1 + xy) &= 50 \\
D(a,b)(x + 1)(y + 1) &= 5 \cdot 5 \cdot 2
\end{aligned}$$

V poslednom vzťahu máme súčin troch prirodzených čísel, pričom $(x + 1) > 1$ aj $(y + 1) > 1$. Rozoberieme možnosti podľa $D(a, b)$, to môže byť len deliteľ 50.

- Ak $D(a, b) \geq 25$, neexistujú žiadne vyhovujúce dvojice, lebo $a + b + D(a, b) + n(a, b) > 4D(a, b) > 50$.
- Ak $D(a, b) = 10$, tak $(x + 1)(y + 1) = 5$, čo nejde, lebo 5 je prvočíslo.
- Ak $D(a, b) = 5$, tak $(x + 1)(y + 1) = 2 \cdot 5$, čiže $x = 1, y = 4$ alebo $x = 4, y = 1$, teda dvojica a, b je 5 a 20 v nejakom poradí. Urobíme skúšku a vidíme, že naozaj vyhovuje zadaniu.
- Ak $D(a, b) = 2$, tak $(x + 1)(y + 1) = 5 \cdot 5$, teda $x = y = 4$, teda $a = b = 8$, táto dvojica však zadaniu nevyhovuje.
- Ak $D(a, b) = 1$, tak $(x + 1)(y + 1) = 5 \cdot 5 \cdot 2$, teda máme dvojice x a y rovné 24 a 1 alebo 9 a 4, obe v ľubovoľnom poradí, čo sú zároveň aj dvojice a a b, keďže v tomto prípade je $x = a$ a $y = b$. Obe tieto dvojice skúškou prejdú.

Zhrnieme, čo sme sa dozvedeli v predošlej časti. Riešenia sú dvojice (5 a 20), (1 a 24), (9 a 4) v ľubovoľnom poradí, teda existuje 6 takých usporiadaných dvojíc.

Komentár: Úloha bola pomerne ľahká, dala sa vyriešiť aj menej šikovnejšími úvahami, ktoré potom viedli k trošku viac možnostiam na rozoberanie, čo však väčšinou nebol problém.

5. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí: $\binom{2n}{n}$ delí najmenší spoločný násobok čísel $1, 2, \ldots, 2n$.

Opravovali: Matúš Hlaváčik a Tomáš Babej **Počet riešiteľov: 11**

Riešenie:

Chceme dokázať, že $\binom{2n}{n}$ delí $n(1, 2, \ldots, 2n)$. Toto tvrdenie sa dá formulovať nasledujúcim ekvivalentným spôsobom: pre každé prvočíslo p a $k_p, l_p \in \mathbb{N}$ také, že p^{k_p} plne delí[1] $\binom{2n}{n}$ a p^{l_p} plne delí $n(1, 2, \ldots, 2n)$, platí $k_p \leq l_p$.

Táto formulácia je motivovaná rozkladom na súčin prvočiniteľov. Menej formálne povedané, posnažíme sa dokázať, že najvyššia mocnina prvočísla, ktorá delí $\binom{2n}{n}$, delí aj $n(1, 2, \ldots, 2n)$. Potom zrejme platí, že $\binom{2n}{n}$ delí $n(1, 2, \ldots, 2n)$.

Uvažujme teda najprv prvočísla p, pre ktoré platí $p > 2n$. Pre tieto prvočísla zrejme platí, že $k_p = 0$ a $l_p = 0$. V opačnom prípade by muselo platiť, že p delí nejaké prirodzené číslo v intervale $< 1, 2n >$, čo je v spore s naším predpokladom $p > 2n$.

To je dobrá správa, naše tvrdenie teda stačí dokázať už len pre $p \leq 2n$.

- Pozrime sa najprv na hodnotu l_p. Pre ľubovoľné prvočíslo p platí:

  $$l_p = \max\{r \mid p^r \text{ plne delí nejaké prirodzené číslo z } 1, 2, \ldots, 2n\}$$

  Inými slovami, najväčšia mocnina prvočísla p, ktorá delí $n(1, 2, \ldots, 2n)$, je rovná najväčšej mocnine prvočísla p, ktorá delí nejaké prirodzené číslo z množiny $\{1, 2, \ldots, 2n\}$. Toto tvrdenie vyplýva z algoritmu na výpočet najmenšieho spoločného násobku, no nie je na škodu si ho dokázať:

  Nech $l'_p = \max\{r \mid p^r$ plne delí nejaké prirodzené číslo z $1, 2, \ldots, 2n\}$. Zrejme $p^{l'_p}$ delí $n(1, 2, \ldots, 2n)$, keďže plne delí nejaké prirodzené čislo z množiny $\{1, 2, \ldots, 2n\}$. Ostáva už len ukázať, že $p^{l'_p}$ je najvačšia taká mocnina p, ktorá delí $n(1, 2, \ldots, 2n)$. Sporom, nech existuje väčšia mocnina p, ktorá delí $n(1, 2, \ldots, 2n)$. Potom ale $n(1, 2, \ldots, 2n)$ nie je najmenší spoločný násobok (premyslite si)!
- Teraz uvažujme hodnotu k_p. Keďže $\binom{2n}{n} = \frac{2n!}{n!n!}$, zrejme potrebujeme zistiť riešenie všeobecného problému: *Aká je najvyššia mocnina q prvočísla p, ktorá delí* $n!$*?* [2]

[1] p^k plne delí n práve vtedy, ak p^k delí n a zároveň p^{k+1} nedelí n

[2] Tento problém je známy aj ako Lagrangeova veta.

Z definície faktoriálu vieme, že $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$. Najvyššia mocnina q prvočísla p, ktorá delí $n!$, bude teda daná súčtom navyšších mocnín prvočísla p, ktoré delia (postupne) $1, 2, \dots, n$:

$$q = \sum_{i=1}^{n} k, p^k \text{ plne delí } i$$

Medzi číslami $1, 2, \dots, n$ je práve $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ [3] prirodzených čísel, ktoré sú deliteľné p. Každé z nich prispieva faktorom p do celkového súčinu. Niektoré z nich sú však deliteľné aj vyššími mocninami p. Keďže každé p^2-hé číslo je deliteľné p^2, práve $\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor$ ich bude prispievať faktorom p^2. Analogicky, práve $\left\lfloor \frac{n}{p^s} \right\rfloor$ ich bude prispievať faktorom p^s. Platí teda:

$$q = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \dots$$

□

Pomocou tohto zistenia už hravo zvládneme zrátať najvyššiu mocninu p v $\binom{2n}{n}$. Keďže $\binom{2n}{n} = \frac{2n!}{n!n!} = \frac{2n!}{(n!)^2}$:

$$k_p = (\left\lfloor \frac{2n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2n}{p^3} \right\rfloor + \dots) - 2 \cdot (\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \dots)$$

Ostáva už len dokázať, že $k_p \leq l_p$.

Preusporiadaním členov dostaneme:

$$k_p = (\left\lfloor \frac{2n}{p} \right\rfloor - 2 \cdot \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor) + (\left\lfloor \frac{2n}{p^2} \right\rfloor - 2 \cdot \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor) + (\left\lfloor \frac{2n}{p^3} \right\rfloor - 2 \cdot \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor) + \cdots$$

Potrebujeme však pracovať s nekonečnými súčtami? Keďže $l_p = \max\{r \mid p^r \text{ plne delí nejaké prirodzené číslo z } 1, 2, \dots, 2n\}$, pre ľubovoľné $t \in \mathbb{N}, t > l_p$, zrejme platí, že $p^t > 2n$, a teda $\left\lfloor \frac{2n}{p^t} \right\rfloor = 0$. Zrejme aj $\left\lfloor \frac{n}{p^t} \right\rfloor = 0$. Stačí nám uvažovať teda prvých l_p členov tohoto súčtu, keďže tie nasledujúce budú tvaru $(0 - 2 \cdot 0) = 0$.

Platí teda:

$$k_p = (\left\lfloor \frac{2n}{p} \right\rfloor - 2 \cdot \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor) + (\left\lfloor \frac{2n}{p^2} \right\rfloor - 2 \cdot \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor) + \cdots + (\left\lfloor \frac{2n}{p^{l_p}} \right\rfloor - 2 \cdot \left\lfloor \frac{n}{p^{l_p}} \right\rfloor)$$

Pozrime sa teraz na hodnotu jednotlivých členov. Každý z nich je tvaru

$$(\left\lfloor \frac{2n}{p^u} \right\rfloor - 2 \cdot \left\lfloor \frac{n}{p^u} \right\rfloor)$$

pre nejaké $u \in \{1, \dots, l_p\}$.Vieme vyjadriť n ako $x \cdot p^u + y$ (kde y je zvyšok n po delení p^u) a po dosadení dostávame:

$$\left\lfloor \frac{2(x \cdot p^u + y)}{p^u} \right\rfloor - 2 \cdot \left\lfloor \frac{(x \cdot p^u + y)}{p^u} \right\rfloor =$$
$$= \left\lfloor \frac{2x \cdot p^u}{p^u} + \frac{2y}{p^u} \right\rfloor - 2 \cdot \left\lfloor \frac{x \cdot p^u}{p^u} + \frac{y}{p^u} \right\rfloor =$$
$$= \left\lfloor 2x + \frac{2y}{p^u} \right\rfloor - 2 \cdot \left\lfloor x + \frac{y}{p^u} \right\rfloor$$

Celé časti môžeme vybrať pred dolné celé časti:

[3] $\lfloor x \rfloor$ - dolná celá časť čísla x

$$2x + \left\lfloor \frac{2y}{p^u} \right\rfloor - 2x - 2 \cdot \left\lfloor \frac{y}{p^u} \right\rfloor =$$
$$= \left\lfloor \frac{2y}{p^u} \right\rfloor - 2 \cdot \left\lfloor \frac{y}{p^u} \right\rfloor$$

Keďže y zvyšok po delení p^u, zrejme $\lfloor y/p^u \rfloor = 0$. Obdobne, pre $2y$ platí odhad $0 \leq 2y < 2 \cdot p^u$ (premyslite si).

Platí teda:

$$(\left\lfloor \frac{2n}{p^u} \right\rfloor - 2 \cdot \left\lfloor \frac{n}{p^u} \right\rfloor) \leq 1$$

Z čoho vyplýva odhad pre hodnotu k_p (ide o súčet l_p členov):

$$k_p = (\left\lfloor \frac{2n}{p} \right\rfloor - 2 \cdot \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor) + (\left\lfloor \frac{2n}{p^2} \right\rfloor - 2 \cdot \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor) + \cdots + (\left\lfloor \frac{2n}{p^{l_p}} \right\rfloor - 2 \cdot \left\lfloor \frac{n}{p^{l_p}} \right\rfloor) \leq l_p$$

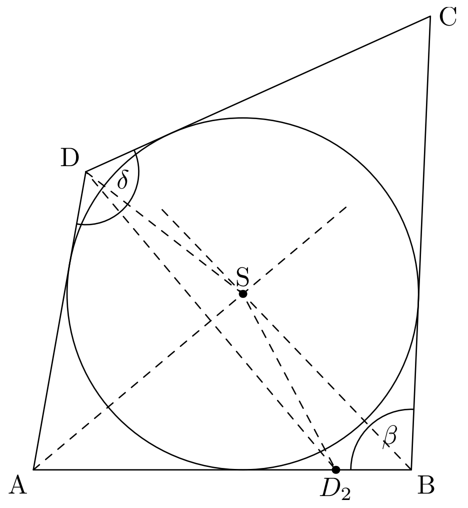
A tým je pôvodná úloha dokázaná!

Komentár: Nie každá úloha, ktorej formulácia obsahuje prirodzené číslo n, je vhodná na indukciu, aj keď to tak na prvý pohľad môže vyzerať.

6. Zostrojte štvoruholník $ABCD$, ak poznáte AB, AD, uhly pri vrcholoch B a D a navyše viete, že sa mu dá vpísať kružnica. Okrem postupu nezabudnite hlavne na dôkaz správnosti tejto konštrukcie.

Opravovali: Peter Milošovič a Robo Tóth **Počet riešiteľov: 7**

Riešenie:



Najprv si uvedomíme, že náš štvoruholník musí byť konvexný, teda všetky jeho vnútorné uhly budú mať menej ako 180 stupňov. Nakreslíme náčrt (používame štandardné označenie) a začne nás trápiť otázka, ako využiť, že sa mu dá vpísať kružnica. Po troške uvažovania alebo kliknutí na Wikipediu zistíme, že najdôležitejšie fakty sú dva: súčet dĺžok protiľahlých strán je rovnaký a osi uhlov pri vrcholoch sa pretínajú v strede vpísanej kružnice. Obe tieto tvrdenia sa považujú aj v matematickej olympiáde za zrejmé a bolo by dobré si ich osvojiť. Ich dôkaz vám určite nezaberie veľa času, skúste si to!

Tak teda, ktoré sa nám bude hodiť viac? Použiť to prvé by bolo zrejme celkom ťažké, pretože my máme zadané dĺžky akurát tých susedných strán. Preto si do obrázku prikreslíme osi uhlov pretínajúce sa v strede vpísanej kružnice S. Môžeme si všimnúť, že bod C stačí hľadať až ako posledný, pretože celú situáciu definujú dobre už nájdené body A, B, D a S. Tí skúsenejší z nás by sa mali rozpamätať na prvé konštrukčné úlohy, ktoré nešli vyriešiť úplne jednoducho. Vždy si vyžadovali nejaký trik a veľmi často to bolo využitie nejakého geometrického zobrazenia alebo súmernosti. Aká súmernosť sa priam ponúka tu? Máte pravdu, je to osová súmernosť, pretože v obrázku máme rovno štyri osi uhlov.

Zobrazme preto bod D podľa osi pri uhle α. Zobrazí sa tak do bodu D_2, ktorý leží na priamke AB v rovnakej vzdialenosti od bodu A ako bod D (rozmyslite si, prečo!). Uhol SD_2A bude taktiež rovnaký s uhlom SDA, teda jeho veľkosť bude $\delta/2$. To však znamená, že bod S je jednoznačne daný ako priesečník polpriamok z bodov B a D_2, ktoré s úsečkou AB zvierajú uhly $\beta/2$, resp. $\delta/2$. Konštrukcia potom bude prebiehať nasledovne.

Narysujeme úsečku AB a nájdeme na polpriamke AB bod D_2 vo vzdialenosti $|AD|$ od A. Pod vyššie spomenutými uhlami vedieme polpriamky v spoločnej polrovine a ich priesečník označíme S. Bod D nájdeme ako obraz bodu

D_2 v osovej súmernosti podľa osi AS. Nakoniec bod C nájdeme ako priesečník polpriamok vedených z bodov D a B zvierajúcich uhly δ a β s úsečkami AD a AB tak, aby bod S patril obom týmto uhlom. Pri overení správnosti konštrukcie už stačí len dokázať, že náš štvoruholník je naozaj dotyčnicový, pretože ostatné podmienky sme využili priamo pri konštrukcii. Stačí overiť, že bod C leží naozaj na osi uhla DCB, a to zjavne platí, pretože je rovnako vzdialený od BC ako od DC (lebo jeho vzdialenosť od BC je rovnaká ako vzdialenosť od BA, tá je rovnaká ako vzdialenosť od DA a tá je rovnaká ako jeho vzdialenosť od DC).

Teraz ostáva len diskusia, kde si uvedomíme, že jediná príležitosť (okrem tej, že nám zadajú nekonvexné uhly), kde môže konštrukcia zlyhať, je hľadanie bodu S. Ten zjavne neexistuje v správnej polrovine, ak v prípade, že $|AD| < |AB|$, máme zároveň zadané uhly $\delta \leq \beta$ a naopak. Ostáva už len prípad, keď $|AB| = |AD|$ (vtedy nám D_2 a B splynú), ale to z prvej spomenutej vlastnosti dotyčnicového štvoruholníka musí znamenať, že sa jedná o kosoštvorec, ktorého konštrukcia je možná len v prípade, ak $\beta = \delta$ (a je potom triviálna).

Komentár: Veľká škoda, že ste sa do tejto úlohy nepustili viacerí, nebola až taká ťažká!

Poradie po 1. sérii Letného semestra 38. ročníka

P.	Meno a priezvisko	Trieda	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
1.	Jozef Lipták	1. F	GTajoBB	9	9	9	9	-	7	1	52
2.	Daniel Onduš	Sexta	GAlejKE	9	8	9	9	8	-	0	51
3.	Kristína Mišlanová	Sexta	GAlejKE	9	9	9	9	-	7	1	50
4.	Juraj Mičko	1. A	GPoštKE	9	9	9	9	1	2	0	47
5.	Jakub Mach	1. A	GPoštKE	9	8	9	9	2	-	0	46
6.	Lenka Kopfová	8. F	ZHradCZ	9	9	9	9	-	-	1	45
7.	Pavol Drotár	1. A	GPoštKE	9	8	9	8	1	-	0	44
8.	Henrieta Micheľová	Sexta	GAlejKE	9	9	9	9	3	-	0	42
8.	Slavomír Hanzely	Sexta A	GMudrPO	9	7	8	8	5	-	0	42
10.	Tomáš Kekeňák	2. B	GKuzmKE	9	4	8	9	-	4	-1	38
11.	Roman Staňo	3. A	GPoštKE	9	9	9	9	-	-	1	36
11.	Samuel Krajči	Tercia	GAlejKE	9	9	-	9	-	-	1	36
11.	Eduard Oravkin	2.	GBajkBA	-	9	9	9	9	-	0	36
11.	Žaneta Semanišinová	Sexta	GAlejKE	9	9	9	9	-	-	0	36
11.	Alexander Ténai	3. A	GPoštKE	9	9	9	9	-	-	1	36
16.	Michal Pándy	1. A	GPoštKE	9	8	-	9	-	-	0	35
17.	Ádam Urbán	1. A	GPoštKE	9	9	7	-	-	-	0	34
18.	Matej Dujava	3. SB	SPPlPO	9	9	9	5	-	1	0	33
19.	Tomáš Terem	2. F	GTajoBB	9	9	9	5	-	-	0	32
20.	Laura Vištanová	1.	GKuzmKE	9	4	-	9	-	-	-1	31
21.	Martin Števko	Tercia	GAlejKE	3	6	9	3	-	-	0	30
22.	Tomáš Kuzma	Sexta	GLi69SC	9	7	3	9	0	0	0	28
23.	Veronika Demčákova	1. A	GPoštKE	3	6	-	9	-	-	0	27
23.	Kristína Bratková	1. B	GŠkulKE	9	9	-	-	-	-	0	27
23.	Florián Hatala	3. A	GPoštKE	9	9	-	9	-	-	0	27
23.	Andrea Ženčuchová	3. B	GMudrPO	9	9	9	-	-	-	1	27
23.	Dorota Jarošová	Septima	GAlejKE	9	9	-	9	-	-	0	27
23.	Jakub Genči	1. A	GPoštKE	9	9	-	-	-	-	0	27
23.	Peter Kovács	Septima	GAlejKE	9	9	9	-	-	-	0	27
30.	Daniel Staško	3. A	GŠevčPO	9	7	-	5	4	1	0	26
30.	Tomáš Domes	5. A	GMenOp	9	8	-	-	-	-	0	26
30.	Zoltán Hanesz	1.A	GPoštKE	8	9	-	-	-	-	0	26
30.	Anton Gromóczki	3. A	GPoštKE	9	8	9	-	-	-	0	26
34.	Marek Koman	Kvarta A	GAlejKE	5	6	0	7	-	-	0	25
34.	Katarína Krajčiová	Septima	GAlejKE	9	7	9	-	-	-	0	25
36.	Zuzana Vrátna	2. D	GPoštKE	9	6	-	7	1	-	0	23
37.	Milan Kubala	2. F	GTajoBB	8	9	-	5	-	-	0	22
38.	Veronika Schmidtová	1. C	GAlejKE	3	-	9	-	-	-	0	21
39.	Eduard Lavuš	1.C	GAlejKE	3	5	2	4	-	-	-1	19
39.	Šimon Vančo	2. B	GŠtúrSL	3	8	-	-	-	-	0	19
39.	Marek Biroš	3. B	GMudrPO	9	-	9	1	-	-	0	19
42.	Samuel Oswald	1. C	GPoštKE	9	-	-	-	-	-	0	18
42.	Richard Pavčík	2. F	GTajoBB	3	8	-	7	-	-	0	18
42.	Pavol Petruš	1. A	GPoštKE	-	9	-	-	-	-	0	18
45.	Samuel Schneider	2. F	GTajoBB	9	8	-	-	-	-	0	17
45.	Dominik Vranay	1. A	GPoštKE	3	4	2	4	-	-	-1	17
47.	Tomáš Koleda	2. F	GTajoBB	9	6	-	-	-	-	0	15
48.	Matúš Kaintz	1. A	GPoštKE	6	-	2	-	-	-	-1	14
48.	Jakub Žolďák	1. A	GPoštKE	1	1	-	5	2	-	0	14
50.	Viktor Pristaš	2. B	GKuzmKE	8	5	-	-	-	-	0	13
51.	Eduard Čuba	Septima	GAlejKE	9	-	-	-	-	-	0	9
52.	Jozef Janovec	Septima	GAlejKE	-	6	-	-	-	-	0	6
52.	Maroš Kulík	1. A	GPoštKE	3	-	-	-	-	-	0	6

Pohár konštruktérov Letného semestra 38. ročníka

P.	Skratka	Škola	P.r.	Body
1.	GPoštKE	Gymnázium Poštová 9 042 52 Košice	19	521
2.	GAlejKE	Gymnázium Alejová 1 041 49 Košice	14	404
3.	GTajoBB	Gymnázium J. G. Tajovského 25 974 01 Banská Bystrica	6	156
4.	GMudrPO	Gymnázium J. A. Raymana Mudroňova 20 081 93 Prešov	3	88
5.	GKuzmKE	Gymnázium s v. j. maď. Kuzmányho 6 041 74 Košice	3	82
6.	ZHradCZ	CZŠ sv. Ľudmily Zámecka 57 747 41 Hradec nad Moravici	1	45
7.	GBajkBA	1. Súkromné gymnázium Bajkálska 20 821 08 Bratislava 2	1	36
8.	SPPlPO	SPŠ elektrotechnická Plzenská 1 080 01 Prešov	1	33
9.	GLi69SC	Gymnázium A. Bernoláka Lichnerova 69 903 01 Senec	1	28
10.	GŠkulKE	Evanjelické gymnázium Škultétyho 10 040 01 Košice	1	27
11.	GMenOp	Mendelovo gymnázium Komenského 5 746 01 Opava	1	26
11.	GŠevčPO	Gymnázium sv. Moniky Tarasa Ševčenka 1 080 01 Prešov	1	26
13.	GŠtúrSL	Cirkevné gym. sv. Mikuláša Štúrova 3 064 01 Stará Ľubovňa	1	19

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

- Jednote slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice
- Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach

Názov **S TROM** – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 5 • Apríl 2014 • Letný semester 38. ročníka (2013/2014)
Internet: `http://seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet: `http://www.strom.sk`
E-mail: `zdruzenie@strom.sk`