STROM
Korešpondenčný matematický seminár

Olá!

A je to zase tu. Ten čas, keď s napätím otvoríte časopis a pozriete sa, či vaša snaha bola zúročená. Netrpezlivo prehľadáte poradie až kým sa nenájdete a nezistíte, či ste sa dostali na toľko vysnívané sústredko. Aj toto by sme do časopisu mohli napísať ešte pred rokom. V dnešných moderných časoch totiž nič listovať nemusíte, pretože sa všetko dozviete na internete. Super, však?

Vaši úžasní STROMisti

TMM

Prečo si Rimania mysleli, že algebra je ľahká? Lebo X bolo stále 10 :). Teraz, keď mám tvoju pozornosť, musím ti povedať o skvelom programe na leto. Aj tento rok bude TMM alebo oficiálne Tábor Mladých Matematikov (neoficálne najlepší týždeň tvojho leta). Čaká ťa skvelý program (skoro ako na sústredku, ale lepší a dlhší), kopa super ľudí a hlavne zážitky, na ktoré budeš ešte dlho spomínať. Tábor sa uskutoční od 16. do 23. augusta a ešte stále je možné sa prihlásiť. Choď na `http://strom.sk/tabory` a prihlás sa čo najskôr (ak by ti stránka náhodou nešla, skús iný prehliadač... niekedy to tam zmení samo od seba na https a čuduje sa, že mu to nejde :D). Tešíme sa na teba!

1.

Opravovala: Janka Baranová
Počet riešiteľov: 26

Robčo našiel prirodzené čísla a, b, c také, že platí $a^2 = 2b^3 = 3c^5$. Zistite najmenšiu možnú hodnotu súčinu abc.

Riešenie:

Začneme trochou deliteľnosti – $2b^3$ je číslo párne, preto aj a^2 je párne číslo (keďže sa rovnajú). Nakoľko 2 je prvočíslo, tak delí nielen a^2, ale aj samotné a. Obdobne $3c^5$ je deliteľné 3, preto aj a^2 je deliteľné 3. Opäť, keďže 3 je prvočíslo, tak 3 delí aj samotné a.

Vsuvka...Dokážme si všeobecne toto tvrdenie: „Ak $p|a^2$, tak $p|a$ (pre a prirodzené a p prvočíslo.)“ **Obmenou implikácie** – ak $p \nmid a$ potom $a = p \cdot k + z$, kde k je prirodzené a z je zvyšok čísla a po delení číslom p (od 1 do $p-1$). Ak a umocníme na druhú, tak dostaneme $a^2 = p^2k^2 + 2pkz + z^2$. Kedy p delí a^2? No predsa ak delí z^2 (keďže predchádzajúce dva členy sú deliteľné p), no to však nemôže, keďže z je číslo od 1 do $p-1$ a jeho umocnením teda nedostaneme číslo deliteľné prvočíslom p.

Čo z toho máme? Číslo a^2 je potom deliteľné 2^2 a zároveň 3^2, teda je deliteľné číslom 36. Potom aj číslo $3c^5$ je deliteľné týmto číslom, čo znamená, že 12 delí c^5. To nám hovorí, že číslo c je deliteľné 6.

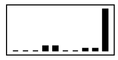
Máme nájsť najmenšiu hodnotu súčinu abc, teda čo najmenšie hodnoty a, b a c, ktoré vyhovujú zadaniu. Podľa zadania vidíme, že $c < b < a$, a tiež sme už zistili, že $6|c$, preto budeme skúšať možnosti od najmenšej možnej, čo je $c = 6$, vždy po násobkoch čísla 6.

1) $c = 6 \Rightarrow 3c^5 = 23328 \Rightarrow a^2 = 23328$
Číslo a nie je prirodzené, čiže $c = 6$ nevyhovuje zadaniu.

2) $c = 12 \Rightarrow 3c^5 = 746496 \Rightarrow a^2 = 746496 \Rightarrow a = 864 \Rightarrow 2b^3 = 746496 \Rightarrow b = 72$
Všetky 3 čísla vyšli prirodzené a je to najmenšia hodnota $abc = 746496$, nakoľko sme použili najmenšie možné c a ostatné dve hodnoty sme už len podľa zadania dopočítali.

Komentár: Väčšina z vás úlohu vyriešila len pomocou deliteľnosti (bod dole však išiel až pričasto – nemôžete hneď prehlásiť, že $2|a$ bez čo i len malej zmienky prečo), bez akéhokoľvek skúšania možností, čo je super. Ja som vám však chcela ukázať, že v niektorých úlohách sa oplatí skúšať, aby sme riešenie skrátili (a možno aj zjednodušili).

2. Opravovali: Roman Staňo a Peter Milošovič
Počet riešiteľov: 23



Koľko existuje 5-ciferných čísel tvaru $\overline{ABCDE}$, pre ktoré platí, že
a) $A > B > C > D > E$?
b) $A \geq B \geq C \geq D \geq E$?

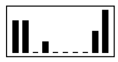
Riešenie:

a) Vezmime množinu čísel $\{0, 1, ..., 9\}$ (čísel, čo môžu byť ciframi). Všimnime si, že keď z tejto množiny vyberieme 5 rôznych prvkov, vieme z nich vytvoriť práve jedno číslo $\overline{ABCDE}$ tak, aby $A > B > C > D > E$. Stačí nám na to usporiadať vybraté prvky od najväčšieho po najmenší (a to zrejme ide len jedným spôsobom). Každý spôsob výberu 5 rôznych prvkov nám teda určuje práve jedno číslo (vždy rôzne). Uvedomme si, že každé číslo $\overline{ABCDE}$ pritom musí byť určené nejakou päticou prvkov (nebolo by len vtedy, keby nejaký prvok pätice nebol v množine cifier, čo by bol spor). Počet čísel $\overline{ABCDE}$ je teda rovnaký ako počet možných výberov pätice. Inými slovami, stačí nám zrátať, koľkými spôsobmi vieme vybrať 5 rôznych prvkov z 10 prvkov. Dá sa na to ísť napr. kombinačným číslom: $\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = 252$ (najmä mladším riešiteľom odporúčame pozrieť si o týchto číslach niečo viac, v budúcnosti vám to určite pomôže).

b) Vráťme sa k našej množine cifier a opäť z nej vyberme 5 prvkov, no teraz nie nutne rôznych (jeden prvok môžeme zvoliť aj viackrát). Z týchto prvkov vieme vytvoriť práve jedno číslo $\overline{ABCDE}$, tak aby $A \geq B \geq C \geq D \geq E$. Znovu to spravíme tak, že vybraté prvky usporiadame od najväčšieho po najmenší (ak budú nejaké prvky rovnaké, je jedno, do akého poradia ich usporiadame, lebo vždy vytvoria rovnaké číslo). Uvedomme si, že každé také číslo pritom musí byť určené nejakým výberom prvkov. Podobne ako v prvej časti, zrátajme koľkými spôsobmi vieme vybrať 5 prvkov z 10 prvkov (no tentokrát aj s opakovaním). Opäť vieme použiť kombinačné číslo: $\binom{10+5-1}{5} = \binom{14}{5} = \frac{14!}{5!9!} = 2002$. Toto ale stále nie je počet čísel $\overline{ABCDE}$. Medzi 2002 výbermi je totiž aj taký výber, v ktorom si zvolíme 5-krát nulu. Aj tento prípad jednoznačne určuje číslo (číslo 0), to však nie je päťciferné. Túto možnosť preto treba odrátať. Počet čísel $\overline{ABCDE}$ je teda $2002 - 1 = 2001$ (každý ďalší spôsob výberu totiž musí zahŕňať aj nejakú nenulovú cifru, ktorá bude určite stáť na pozícii A, teda číslo bude päťciferné).

Komentár: Nikdy nezabudnite dokázať, že systém vytvárania možností naozaj obsiahne všetky a žiadnu nevynechá. Tu to bolo očividné, v ťažších úlohách to však také ľahké nebude.

3. Opravoval: Matúš Hlaváčik
Počet riešiteľov: 13

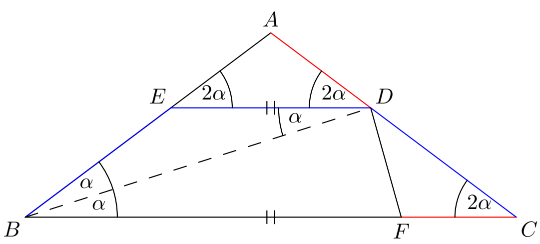


V rovnoramennom trojuholníku ABC so základňou BC pretína os uhla pri B stranu AC v bode D. Vieme, že platí $|BC| = |BD| + |AD|$. Určte veľkosť uhla pri vrchole A.

Riešenie:

Začneme obrázkom. Okrem informácií za zadania tam dokreslíme rovnobežku so stranou BC, ktorá bude prechádzať bodom D. Jej priesečník so stranou AB nazveme E. Podstatná je určite úsečka BD, keďže je súčasťou zadania. Je dôležité nejakým spôsobom zúžitkovať informáciu $|BC| = |BD| + |AD|$. Ako? Dokreslíme bod F na stranu BC tak, že $|BF| = |BD|$, a teda podľa rovnosti zo zadania aj $|FC| = |AD|$. Skvelé, použili sme rovnosť a stále ostávajú ešte dve informácie – rovnoramennosť a os uhla (BD).

Označme $|\sphericalangle DBC| = \alpha$. Potom aj $|\sphericalangle EBD| = \alpha$ (DB je os uhla). Trojuholník ABC je rovnoramenný (podľa zadania), preto $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ACB| = 2\alpha$. Uhly AED a ADE sú súhlasné k uhlom ABC a ACB (keďže $ED||BC$), preto veľkosť všetkých štyroch je rovnaká, a to 2α.



Keďže $|\sphericalangle EBC| = |\sphericalangle DCB| = 2\alpha$, tak lichobežník $BCDE$ je rovnoramenný, čo znamená, že $|BE| = |CD|$. Uhol EDB je striedavý k uhlu DBF, jeho veľkosť je teda α, preto trojuholník EBD je rovnoramenný (so základňou BD) a platí $|BE| = |ED| = |CD|$.

Trojuholníky EDA a DCF sú zhodné podľa vety *sus*. Zo zhodnosti týchto trojuholníkov vieme dve informácie – uhol, ktorého veľkosť chceme vypočítať, je DFC a tiež, že $|\sphericalangle CDF| = |\sphericalangle DEA| = 2\alpha$. Zo súčtu uhlov v trojuholníku CDF vieme, že uhol, ktorý chceme vypočítať, má veľkosť $180° - 4\alpha$.

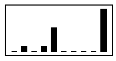
Tiež však vieme, že trojuholník BDF je rovnoramenný (keďže tak sme si bod F zostrojili), preto $|\sphericalangle BFD| = 90° - \alpha/2$, a teda $|\sphericalangle CFD| = 90° + \alpha/2$ (ako doplnok do priameho uhla BFC).

Čo sme z toho dostali? Veľkosť uhla CFD (teda uhla, ktorý chceme vypočítať) je $180° - 4\alpha$ a zároveň $90° + \alpha/2$, z čoho dostaneme (po krátkom výpočte) jeho veľkosť, a to $100°$.

Komentár: Veľa z vás si myslí, že ak je niečo jednoduché, tak to netreba písať (alebo, že postup vôbec netreba a stačí napísať, že som to „vyuhlil“). Majte na pamäti, že treba napísať, prečo počítame uhly tak, ako počítame (fakty ako susednosť, striedavosť a podobne sú jednoduché, ale treba ich aspoň spomenúť). Opravovateľ by nemal pri opravovaní vôbec myslieť. Iba čítať vaše riešenie a malo by mu byť všetko jasné (ak tým pojmom rozumie). Inak ste boli celkom fajn ;-).

4. **Opravoval: Matúš Stehlík**

Počet riešiteľov: 16



Nech x a y sú kladné reálne čísla spĺňajúce $y^3 + y \leq x - x^3$. Dokážte, že potom platí $y < x < 1$ a $x^2 + y^2 < 1$.

Riešenie:

Vychádzame z rovnice

$$y^3 + y \leq x - x^3, \qquad \text{kde } x, y > 0.$$

Ľavá strana je kladná, preto musí byť aj pravá, t.j.

$$0 < x - x^3 = x(x+1)(1-x).$$

Keďže $x > 0$, tak prvé dva činitele sú kladné, preto musí byť aj tretí. To nám dáva $x < 1$. Zároveň z $x, y > 0$ máme

$$y < y^3 + y \leq x - x^3 < x,$$

čiže $y < x$. Spolu s predošlým výsledkom tak dostávame prvé tvrdenie

$$y < x < 1.$$

Teraz dokážeme druhú časť. Z predošlého vyplývajú nerovnosti $x^2 < 1$ a $xy < 1$ (tu je podstatné aj to, že x, y sú kladné, inak by tieto nerovnosti nemuseli platiť). Ich sčítaním a vynásobením y (môžeme to urobiť, lebo y je kladné) dostávame

$$\begin{aligned} x^2 + xy &< 2 \\ y(x^2 + xy) &< 2y \\ 0 &< 2y - x^2y - xy^2. \end{aligned}$$

Túto nerovnosť sčítame s nerovnosťou zo zadania a upravujeme

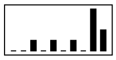
$$\begin{aligned} y^3 + y &< x - x^3 + (2y - x^2y - xy^2) \\ x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 &< x + y \\ (x+y)(x^2+y^2) &< x + y \\ x^2 + y^2 &< 1. \end{aligned}$$

V poslednom kroku sme mohli vydeliť $(x + y)$, lebo je to kladné číslo. Tým je dôkaz hotový.

Komentár: Prvá časť bola jednoduchšia a dala sa vyriešiť aj takpovediac slovne len popísaním dôvodov, prečo to hneď vidno zo zadania. V druhej časti už bolo potrebné riešiť úlohu viac matematicky. Ak ste si prečítali riešenie a kladiete si otázku: „A to ako som mal na toto prísť?“ Rozmýšľate dobre. Ako sa dá prísť na riešenie je, že začneme od toho, čo chceme dostať, a snažíme sa to upraviť na niečo, čo určite platí. V našom prípade po pár úpravách zistíme, že nám tam zavadzajú niektoré členy... a tak musíme ešte dokázať inú nerovnosť. Tento myšlienkový postup je takmer opačný od toho, ako sa riešenie píše. Pri spisovaní riešenia sa snažíme, aby nám čitateľ celý čas veril. Aby sme stále uvádzali len fakty, ktoré sú pravdivé. A síce to potom vyzerá ako čarovanie, kde na konci sa z ničoho nič objaví to, čo sme chceli, no veľmi ľahko sa to číta / kontroluje. A ak niekoho zaujíma, zhruba ako sme na to prišli, stačí, ak si riešenie prejde ešte raz od konca.

5. Opravoval: Robčo Tóth

Počet riešiteľov: 9



Čísla 1, 2, ..., n^2 sú zapísané do štvorcovej tabuľky $n \times n$ tak, že čísla v každom riadku (zľava doprava) a v každom stĺpci (zhora dole) sú v rastúcom poradí. Označme a_{jk} číslo zapísané v j-tom riadku a k-tom stĺpci. Nech b_j je počet rôznych čísel, ktoré sa môžu objaviť v tabuľke na mieste a_{jj}. Dokážte, že

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n \leq \frac{n}{3}(n^2 - 3n + 5).$$

(Napríklad pre $n = 3$ jediné čísla, ktoré sa môžu v tabuľke objaviť ako a_{22} sú 4,5,6, takže $b_2 = 3$.)

Riešenie:

Poďme sa pozrieť na to, ako vypočítať b_j. Toto číslo označuje počet možných čísel, ktoré sa môžu objaviť na j-tom diagonálnom políčku tabuľky. Podľa zadania na políčkach naľavo hore od neho musia byť menšie čísla. Preto číslo v ňom musí byť väčšie ako počet týchto políčok – ináč by sme do nich nemali čo napísať. Platí teda nerovnosť

$$j^2 - 1 < a_{jj}.$$

Rovnako tak to platí aj opačne – čísla napravo dole od neho musia byť väčšie. Preto číslo v ňom nemôže presahovať to, ku ktorému pripočítaním počtu týchto políčok dostaneme n^2, t.j. najväčšie číslo, ktoré máme k dispozícii. Z toho potom plynie

$$a_{jj} + ((n - j + 1)^2 - 1) \leq n^2.$$

Spojením oboch nerovností dostávame

$$j^2 - 1 < a_{jj} \leq n^2 - ((n - j + 1)^2 - 1).$$

Vidíme, že vyhovujúcich čísel a_{jj} je nanajvýš rozdiel pravej a ľavej strany nerovnosti, t.j.

$$b_j \leq n^2 - ((n - j + 1)^2 - 1) - (j^2 - 1) = 1 - 2n + (2n + 2)j - 2j^2.$$

Tu si treba uvedomiť, že sme naozaj ukázali iba nerovnosť a nie rovnosť. Ak by sme chceli ukázať rovnosť, museli by sme nájsť spôsob, akým tie čísla do tabuľky umiestňovať, aby nám opravovateľ veril, že všetky tieto možnosti sú naozaj aj realizovateľné. Nám našťastie ale bude stačiť aj tento odhad (aj keď pozorným mysliteľom neunikne, že to rovnosť naozaj nadobúda). Odhadnutím každého ščítanca b_j zvlášť dostávame

$$\sum_{j=1}^{n} b_j \leq \sum_{j=1}^{n} 1 - 2n + (2n + 2)j - 2j^2 = n(1 - 2n) + (2n + n)\sum_{j=1}^{n} j - 2\sum_{j=1}^{n} j^2.$$

Na tomto mieste máme dve možnosti. Môžeme pomocou matematickej indukcie ukázať, že výraz napravo je ten istý, ako ten zo zadania (v zásade len ukážeme, že s rastúcim n sa prírastok tohoto výrazu a toho v zadaní rovná). Alebo požijeme známe a veľmi užitočné vzťahy na súčty radov $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$ a $\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Zvyšok sú už len slastné algebraické úpravy.

6. Opravoval: Tomáš Babej

Počet riešiteľov: 11

Dokážte, že existuje taká nekonečná rastúca postupnosť prirodzených čísel $a_1, a_2, \ldots$, že pre každé celé $k \geq 0$, postupnosť $a_1 + k, a_2 + k, a_3 + k, \ldots$ obsahuje len konečne veľa prvočísel.

Riešenie:

Uvažujme postupnosť danú predpisom $a_n = n! + 2$. Ukážeme, že táto postupnosť spĺňa podmienku zo zadania, inými slovami, že postupnosť a_1^k, a_2^k, $a_3^k, \ldots$ daná predpisom $a_n^k = a_n + k = n! + 2 + k$ obsahuje len konečné množstvo prvočísel pre ľubovoľné $k \in \mathbb{N}$.

Lemma *(pomocné tvrdenie).* Pre všetky $n \geq k + 2$ je a_n^k zložené číslo.

Stačí ukázať, že a_n^k vieme napísať ako súčin dvoch prirodzených čísel rôznych od 1.

$$\begin{aligned} a_n^k &= n! + k + 2 = \\ &= 1 \,.\, 2 \cdots (k + 2) \cdots (n) + k + 2 \\ &= (k + 2) \cdot \Big(1 \cdot 2 \cdots (k + 1) \cdot (k + 3) \cdots (n) + 1\Big) \end{aligned}$$

Keďže výrazy na pravej aj na ľavej strane súčinu sú zrejme väčšie než 1, a_n^k je zložené číslo. Ostáva podotknúť, že tvrdenie platí aj pre hraničný prípad $n = k + 2$, kedy $a_n^k = (k + 2) \cdot \big(1 \cdot 2 \cdots (k + 1) + 1\big)$.

S využitím práve dokázanej lemmy je už zvyšok príkladu triviálny. Keďže pre všetky $n \geq k + 2$ je a_n^k zložené číslo, členy postupnosti a_n^k môžu byť prvočísla len v prípade, že $n < k + 2$. Takých členov postupnosti je konečný počet $(k - 1)$ a teda aj počet prvočísel v postupnosti je konečný.

Komentár: Zopár z vás sa nechalo uniesť jednoduchšou verziou postupnosti, kde $a_{n,k} = n! + k$. Tá však nefunguje pre malé hodnoty k. Poučením do budúcnosti je – vyskúšajte si svoje riešenie pre hraničné prípady.

Konečné poradie Letného semestra 39. ročníka

P.	Meno a priezvisko	Kategória	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
1. - 2.	Juraj Mičko	S2	49	9	9	1	9	9	9	103
	Samuel Krajči	Z9	54	8	9	9	-	9	5	103
3.	Viktória Brezinová	Z9	54	8	9	-	3	8	8	99
4.	Martin Masrna	S1	47	9	4	-	9	8	9	95
5.	Jakub Mach	S2	52	9	9	-	9	-	9	88
6.	Martin Števko	Z9	49	8	-	9	-	6	3	84
7.	Veronika Demčáková	S2	26	8	9	9	9	4	-	69
8. - 9.	Henrieta Micheľová	S3	19	9	9	-	9	8	9	63
	Michal Pándy	S2	26	9	9	1	9	-	8	63
10.	Žaneta Semanišinová	S3	35	9	9	-	9	-	-	62
11.	Daniel Onduš	S3	31	9	9	0	4	8	-	61
12.	Pavol Drotár	S2	37	8	9	-	4	-	-	58
13.	Michaela Dlugošová	S1	39	9	-	-	-	-	-	57
14.	Marianna Pavlišinová	S2	31	9	9	-	-	2	5	56
15.	Kristína Mišlanová	S3	27	9	9	-	9	-	-	54
16. - 17.	Filip Csonka	Z9	35	-	-	9	-	-	-	53
	Zoltán Hanesz	S2	27	8	9	-	9	-	-	53
18.	Samuel Gazda	S3	24	9	9	-	-	-	5	47
19.	Norbert Micheľ	Z7	19	9	3	1	4	-	1	46
20.	Juraj Jursa	S1	18	-	7	8	4	-	-	45
21.	Martin Mičko	Z9	28	-	-	8	-	-	-	44
22.	Samuel Chaba	Z9	40	-	-	-	-	-	-	40
23.	Tímea Zvoláneková	S1	39	-	-	-	-	-	-	39
24.	Jakub Žoldák	S2	16	9	9	-	4	-	-	38
25.	Jakub Genči	S2	20	8	9	-	-	-	-	37
26.	Daniel Kopf	S3	27	9	-	-	-	-	-	36
27.	Diana Hlaváčová	S3	18	9	4	-	1	-	-	32
28.	Eduard Lavuš	S2	26	5	-	-	-	-	-	31
29.	Erik Berta	Z9	19	4	3	-	-	-	-	30
30.	Martin Mihálik	Z9	26	-	-	-	-	-	-	26
31.	Martin Šalagovič	Z9	7	-	9	-	-	-	-	25
32.	Veronika Rišková	S2	13	9	-	0	-	-	-	22
33. - 34.	Lenka Kopfová	Z9	18	-	-	-	-	-	-	18
	Natália Tóthová	S1	18	-	-	-	-	-	-	18
35. - 36.	Daniel Koľ	S2	15	-	-	-	-	-	-	15
	Peter Papcun	S2	15	-	-	0	-	-	-	15
37.	Šimon Vančo	S3	0	2	8	-	-	-	-	10
38.	Ondrej Bínovský	S4	9	-	-	-	-	-	-	9
39.	Jarmila Šimková	S1	0	-	-	3	-	-	-	6
40.	Marek Koman	S1	0	-	-	-	-	-	-	0

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

hodina deťom
NADÁCIA PRE DETI SLOVENSKA
CHILDREN OF SLOVAKIA FOUNDATION

Projekt podporila Nadácia pre deti Slovenska z fondu Hodina deťom

Názov	STROM – korešpondenčný matematický seminár Číslo 10 • Máj 2015 • Letný semester 39. ročníka (2014/2015)
Internet:	`http://seminar.strom.sk`
E-mail:	`strom@strom.sk`
Vydáva:	Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet:	`http://www.strom.sk`
E-mail:	`strom@strom.sk`