



## Čaute semienka!

Ak držíte tento časopis, znamená to, že ste dopadli na úrodnú pôdu. Teraz už vám ostáva iba poriadne rátať, aby ste sa mohli čím skôr zakoreniť. My vedúci vám sľubujeme, že vás nasledujúci semester budeme hnojiť kvalitnými príkladmi. Tak šup šup! Tešíme sa na listy vašich riešení.

Vaši **STROM**isti



## Krúžok

Aj v druhom polroku školského roku 2015/2016 sa na **Prírodovedeckej fakulte UPJŠ** v Košiciach na Jesennej 5 koná každý týždeň vo štvrtok od 15.00 matematický krúžok, ktorý je zameraný hlavne na prípravu na krajské kolo Matematickej olympiády v kategóriách B a C, ale i na prípravu tých, čo postúpili na celoštátne kolo Matematickej olympiády kategórie A. Po skončení týchto kôl, od apríla 2016, bude krúžok zameraný na riešenie olympiádných úloh, ktoré budú vhodnou prípravou pred ďalším ročníkom Matematickej olympiády. Krúžku sa môže zúčastniť ktorýkoľvek stredoškôlak (ale i šikovný základnoškôlak), ktorý sa chce venovať Matematickej olympiáde.

## 2% z daní

Aj tento rok môžu vaši rodičia venovať 2% zo svojich daní verejno-prospešným organizáciám, ako sme my (dokonca niektorí až 3%).

Peniaze získané z 2% v **STROME** využívame na pokrytie časti nákladov spojených s aktivitami pre vás (kopírovanie časopisov, poštovné, ceny na súťažiach, aktivity na sústreďeniach, ...).

Chceme vás preto poprosiť, aby ste rodičom, členom svojej blízkej aj vzdialenej rodiny, susedom a kludne aj cudzím ľuďom na ulici porozprávali o našich aktivitách a poprosili ich, aby svojou troškou podporili našu dobrovoľnícku činnosť a pomohli tým skupine mladých cielavedomých ľudí zabezpečujúcich chod týchto úžasných seminárov, ktoré tak zbožňujete. Porozprávajte im, čo pre vás znamená sústredenie, čo vám dáva riešenie úloh semináru a vysvetlite im, že takto podporia aj váš rozvoj a prispievajú k zmysluplnému tráveniu vášho voľného času.

Potrebné informácie o tom, ako darovať 2% z daní, nájdete na stránke <https://seminar.strom.sk/sk/zdruzenie/2percenta> a radi vám zodpovieme na ľubovoľné otázky ohľadom našej podpory aj mailom na [info@strom.sk](mailto:info@strom.sk). Ďakujeme!

## Ako bolo na sústreďení?

Od 7.2. do 12.2.2016 sa v škole v prírode v Kysaku konalo zimné sústredenie **STROMu**. Všetci sme sa preniesli do budúcnosti, kde namiesto ľudí pracovali stroje a ľudia už nemuseli robiť vôbec nič, iba udržiavať stroje, pracovať vo výskume a tvoriť umenie. Účastníci začali plniť svoj kurz údržbárčiny, keď zrazu začali mať stroje problémy a množstvo systémov prestalo fungovať tak, ako malo. Nakoniec sme zistili, že za všetkým stojí Jozef U., tvorca špeciálnych chipov, vďaka ktorým fungujú všetky stroje. Na sústreďení sme si okrem hrania rôznych hier (matematických, či nematematických) vypočuli aj mnoho zaujímavých prednášok. Tešíme sa na Vás aj na ďalších sústreďeniach.

## Čo je seminár STROM?

Seminár **STROM** (Súťaž **T**alentovaných **R**iešiteľov **O**blubujúcich **M**atematiku), organizovaný Združením **STROM**, je pokračovateľom najstaršej súťaže svojho druhu v bývalom Česko-Slovensku, ktorá vznikla pod názvom Korešpondenčný matematický seminár v roku 1976 v Košiciach. Tento seminár je *bezplatný* a je určený najmä pre študentov stredných škôl, no do riešenia sa kludne môžu zapojiť aj mladší. Každý školský rok čakajú na riešiteľov dva semestre, v ktorých dostanú zadania dvoch sérií príkladov.

Tí najlepší riešitelia sa potom dostanú na týždňové sústredenie a zažijú veľa zábavy. Sústreďenia na konci semestrov majú byť pre žiakov odmenou a zároveň motiváciou pre pokračovanie a zlepšovanie sa v riešení matematických seminárov.

Samotná korešpondenčná časť je v priebehu roka dopĺňovaná rôznymi akciami. Každoročne organizujeme Matboj, matematickú súťaž pre družstvá, ale aj zábavné hry, výlety alebo športové stretnutia. Naším cieľom je ukázať žiakom krásu matematiky, niekedy aj netradičným a hravým spôsobom. Preto dúfame, že náš seminár a s ním spojené akcie si nájdú svojich stálych nadšencov v radoch žiakov, ale aj podporovateľov v radoch učiteľov.

## Pokyny pre riešiteľov

**Seminár** je určený pre žiakov prvého až štvrtého ročníka stredných škôl a príslušných tried osemročných a bilingválnych gymnázií. Zapojiť sa môžu aj žiaci nižších ročníkov; v súťaži majú rovnaké podmienky a výhody ako prváci. STROM je súťaž jednotlivcov.

**Prihlásenie do semestra** prebieha online, na našej webovej stránke <https://seminar.strom.sk>. Ak si novým riešiteľom, alebo ešte nemáš vytvorený účet, zaregistruj sa a vyplň povinné údaje v užívateľskom profile – odkaz **Aktualizovať profil** v sekcii **Správa účtu**. Tieto údaje potrebujeme, aby sme sa s tebou mohli skontaktovať aj v čase, keď nie si v škole (prázdniny, ...), v prípade pozývania na sústredenie a tiež, aby sme ňa mohli uverejniť v poradí riešiteľov aktuálnej časti semináru. Na tejto stránke nájdeš takisto svoje opravené a obodované riešenia, bez ohľadu na to, ako si ich poslal. Prihláška (vyplnenie profilu) je **povinná pre všetkých riešiteľov**. Úlohy, ktoré sa nedajú priradiť k užívateľovi s korektne vyplneným profilom, **nebudú opravené**.

**Úlohy** riešte zásadne samostatne, neodpisujte, v riešeníach vysvetľujte celý svoj myšlienkový postup ako v Matematickej olympiáde. Svoje riešenia môžete poslať poštou alebo cez našu webovú stránku, nie odovzdávať osobne. Pri opravovaní sa držíme zásady, že čo sa nedá prečítať, nemôže byť ohodnotený bodmi. Preto zväzťe, či nenapíšete svoje riešenia na počítači. Riešenia poštou zasielajte do uvedeného termínu (rozhoduje dátum poštovej pečiatky) na adresu

PF UPJŠ  
**STROM**  
Jesenná 5  
041 54 Košice.

**Elektronické odovzdávanie** je možné do uvedeného termínu cez nový webový portál na stránke [seminar.strom.sk](https://seminar.strom.sk). Súbor s riešením odovzdáte jednoducho po prihlásení do svojho užívateľského účtu – tlačidlo **Odovzdať** pri konkrétnom príklade v sekcii **Príklady**. Úlohy odovzdávajte primárne vo formáte PDF, portál na vaše riziko zvládne aj konverziu z iných formátov ako je JPG, PNG, či DOC.

V prípade technických problémov na našej strane posielajte na e-mailovú adresu [riesenia@strom.sk](mailto:riesenia@strom.sk) vo formáte PDF.

**Riešenie** každej úlohy píšete na samostatný papier **formátu A4**, respektíve do samostatného súboru, na výšku s **menom, školou, triedou a číslom úlohy**. Ak by vám nebolo jasné zadanie niektorej úlohy, obráťte sa na nás prostredníctvom komentárom k úlohám na našej stránke, cez e-mail [strom@strom.sk](mailto:strom@strom.sk) alebo osobne.

**Bodovanie** úloh závisí od kvality riešenia. Za každú úlohu môže riešiteľ získať najviac 9 bodov. Body môžete získať aj za čiastočné vyriešenie zadaných úloh. Preto sa nebojte poslať aj svoje neúplné riešenia. Do celkového poradia sa započítavajú body takto:

- štvrtáci, oktáva:** všetky vyriešené úlohy
- tretiaci, septíma:** všetky vyriešené úlohy
- druháci, sexta:** päť najlepšie vyriešených úloh plus minimum z týchto piatich úloh
- prváci, kvinta a mladší:** päť najlepšie vyriešených úloh plus maximum z týchto piatich úloh

### Príklad použitia pravidiel:

Štyria bratia, štvrták Vlado, tretiak Fero, druhák Jaro a prvák Marcel, vyriešili všetky úlohy úplne rovnako (zhodou náhod, že) za 3, 2, 4, 1, 5 a 4 body. Vlado potom získal  $3 + 2 + 4 + 1 + 5 + 4 = 19$  bodov, Fero tiež získal  $3 + 2 + 4 + 1 + 5 + 4 = 19$  bodov, Jaro  $(3 + 2 + 4 + 5 + 4) + 2 = 20$  bodov a Marcel  $(3 + 2 + 4 + 5 + 4) + 5 = 23$  bodov. Jasné, nie?

**Varovania (!!!)**. Body sa samozrejme bez výnimky strhávajú za odpisovanie a za poslanie riešení po termíne. Pri odpisovaní rozlišujeme podobné riešenia (počet bodov delíme počtom zúčastnených a zaokrúhlime nadol) a „takmer kópie“, ktoré ostávajú bez bodu. Ak (náhodou) nájdete úlohu riešenú v literatúre, uveďte názov, autora a stranu, inak riskujete stratu bodov za odpisovanie (je však potrebné napísať aj samotné riešenie). V prípade, že nie ste spokojní s bodovým ohodnotením vášho riešenia, môžete nám do dvoch týždňov od rozoslania riešení zaslať poštou sťažnosť a tá bude prešetrená.

**Sústredenie** je odmenou pre najlepších, príležitosťou naučiť sa niečo nové a stretnúť sa s ostatnými riešiteľmi. Zúčastnia sa ho najlepší riešitelia podľa záverečného poradia a členovia minimálne prvých troch najlepších družstiev z matboja, ak sa v príslušnom polroku koná. Sústredenie je určené najmä pre študentov stredných škôl (a im príslušných ročníkov na osemročnom gymnáziu), mladší žiaci (tí, ktorí počas sústredenia nie sú stredoškôlkami) sú pozvaní ako náhradníci. Ďalší účastníci a náhradníci sú pozývaní podľa poradia **STROMu** a matboja; nie však tí riešitelia, ktorí už majú maturitu za sebou.

## Zadania úloh letného semestra 40. ročníka

Ak náš seminár riešiš prvýkrát, nezabudni si vytvoriť profil na našej stránke <https://seminar.strom.sk>

# 1 Prvá séria

Termín odoslania riešení: **21. 3. 2016**

1. Dokážte, že niektoré dve z reálnych čísel  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  sa líšia maximálne o 1, ak pre nich platí

$$\begin{aligned}ab + cd &= 1, \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 &= 4.\end{aligned}$$

2. Majme konvexný štvoruholník  $ABCD$  s pravým uhlom pri vrchole  $C$ . Označme  $S$  stred strany  $AB$ . Dokážte, že:

$$2 \cdot |CS| \leq |BD| + |DA|.$$

Ukážte tiež, kedy nastane rovnosť.

3. Robčo a Peťo hrajú hru s gorodkami. Začína Robčo a v ťahoch sa striedajú, pričom každý vo svojom ťahu zvýši veľkosť gorodiek (označme  $n$ ) o vlastného deliteľa  $n$  (deliteľa menšieho ako  $n$ ). Na začiatku majú dvojdielne gorodky ( $n = 2$ ). Vyhráva ten, kto prvý zvýši  $n$  na hodnotu väčšiu alebo rovnú ako 2016. Obaja hrajú najlepšie ako sa dá. Kto vyhrá?
4. Vyriešte nasledujúcu rovnicu v celých číslach (svoje riešenie odôvodnite):

$$x_1^4 + \dots + x_{14}^4 = 2015.$$

5. Ukážte, že pre každé prvočíslo  $p$  existujú prirodzené čísla  $a$ ,  $b$  také, že  $a^2 + b^2 + 1$  je deliteľné  $p$ .
6. Nech  $ABCD$  je lichobežník so základňami  $AB$  a  $CD$  ( $|AB| > |CD|$ ). Body  $K$  a  $L$  ležia na úsečkách  $AB$  a  $CD$  tak, že  $|AK| : |KB| = |DL| : |LC|$ . Predpokladajme, že existujú body  $P$  a  $Q$  na úsečke  $KL$ , pre ktoré platí

$$|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle BCD| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle CQD| = |\sphericalangle ABC|.$$

Dokážte, že body  $P$ ,  $Q$ ,  $B$ ,  $C$  ležia na jednej kružnici.

# 2 Druhá séria

Termín odoslania riešení: **2. 5. 2016**

1. Máme kružnicu  $k$  a bod  $X$  mimo nej. Nech  $XY$  a  $XZ$  sú dotyčnice ku kružnici  $k$ , pričom body  $Y$  a  $Z$  sú body dotyku. Dokážte, že stred kružnice vpísanej do trojuholníka  $XYZ$  leží na kružnici  $k$ .
2. Dokážte, že ak  $p, q, r$  sú racionálne čísla a platí  $p^2 + q^2 + r^2 + 2 = (p + q + r)^2$ , potom  $(1 + p^2)(1 + q^2)(1 + r^2)$  je druhou mocninou racionálneho čísla.
3. Určte počet podmnožín množiny  $\{1, 2, 3, \dots, 50\}$ , ktorej súčet prvkov je väčší alebo rovný ako 638.

4. Nech pre reálne čísla  $x, y, z > 0$  platí

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1,$$

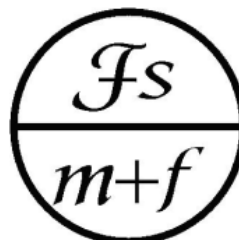
dokážte, že  $(x - 1)(y - 1)(z - 1) \geq 8$ .

5. Nájdite najmenšie prirodzené číslo  $t$ , pre ktoré existujú celé čísla  $x_1, x_2, \dots, x_t$  také, pre ktoré platí

$$x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_t^3 = 2002^{2002}.$$

6. Máme tri obrovské krčahy, v každom z nich je kladný celočíselný počet litrov vody. Dovoľené je doliať do ľubovoľného krčahu rovnaké množstvo vody, aké v ňom práve je, z krčahu, ktorý obsahuje dostatočné množstvo vody. Dokážte, že pomocou takéhoto prelievania je vždy možné úplne vyprázdniť niektorý krčah.

Za podporu a spoluprácu ďakujeme



<b>Názov</b>	<b>STROM</b> – korešpondenčný matematický seminár Číslo 4 • Február 2016 • Letný semester 40. ročníka (2015/2016)
<b>Internet:</b>	<a href="http://seminar.strom.sk">http://seminar.strom.sk</a>
<b>E-mail:</b>	<a href="mailto:strom@strom.sk">strom@strom.sk</a>
<b>Vydáva:</b>	Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
<b>Internet:</b>	<a href="https://zdruzenie.strom.sk">https://zdruzenie.strom.sk</a>
<b>E-mail:</b>	<a href="mailto:info@strom.sk">info@strom.sk</a>