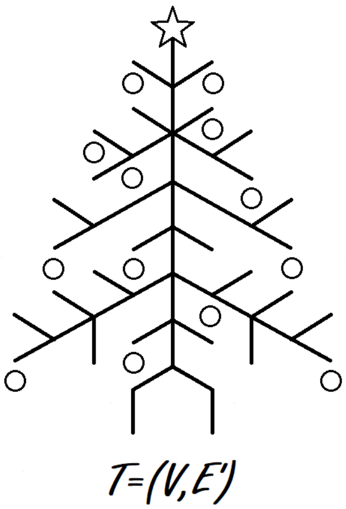
STROM
Korešpondenčný matematický seminár

Milí naši riešitelia,

za nami je druhá séria
a pred nami prázdniny,
kľud a oddych od driny.
Prichádza k vám nový časák a s ním opravené príklady,
kto nevedel, možno jasá, že mu vyšli odhady.
Pri šálke jazmínového čaju omrknite svoje riešenia,
a tí, čo to správne majú, nech čakajú skvelé hodnotenia.
Ak vám príklad nevyšiel, nezúfajte, pozrite vzorák príkladný,
a o chvíľu je tu nová séria aj s ďalšími príkladmi.
Najlepších z vás už tradične čaká
sústredko, čo mnohých láka.
3.-8. februára sa o vašu zábavu Danišovciach postará
tím najskvelejších vedúcich,
ktorí sa tešia na všetkých účastníkov po matike a zábave prahnúcich.
A po tomto týždni srandy
v spoločnosti skvelej bandy
začína sa ďalšia séria,
takže naostrite svoje perá a hurá horsa do riešenia.
Krásne Vianoce a na nový rok veľa úspechov pri práci vám prajú



Vaši **STROM**áci

Vianočný Maxiklub

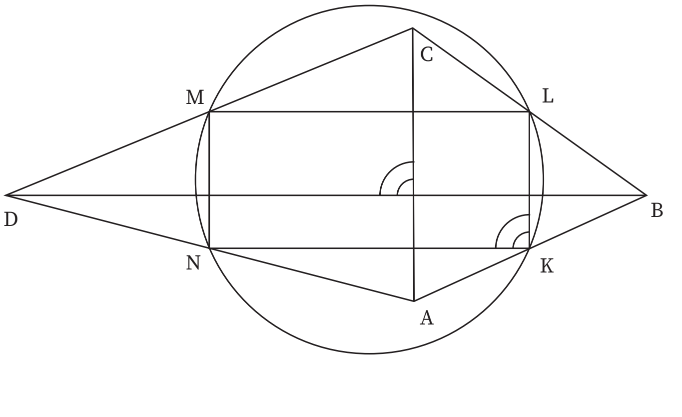
Vianoce sa už nebezpečne rýchlo blížia, no vianočné prázdniny prichádzajú ešte skôr! Ak premýšľate nad tým, čo robiť s predprázdninovým voľným časom, neváhajte začať premýšľať o strávení sobotnejšieho poobedia na každoročnom Maxiklube (vianočnom stretnutí STROMákov) ! Stretneme sa 22. 12. o 14:30 v miestnosti SJSP19 na PF UPJŠ, Jesenná 5, Košice. Okrem seba nezabudnite doniesť aj vianočnú náladu a nejaké fajné jedlo, určite sa zíde :).

1. **Opravovali: Dorot Jarošová, Peťo Kovács**
Počet riešiteľov: 54

Nech $ABCD$ je štvoruholník, v ktorom existuje kružnica, ktorá prechádza stredmi všetkých strán tohto štvoruholníka. Dokážte, že AC a BD sú na seba kolmé.

Riešenie:

Označme si stredy strán štvoruholníka $ABCD$ po poradí K, L, M, N.



Pozrime sa teraz pozornejšie na úsečku KL. Táto úsečka spája stredy dvoch strán, a teda ju môžeme nazvať strednou priečkou trojuholníka ABC. Ako vieme, stredná priečka je rovnobežná so stranou trojuholníka, ktorú nepretína (teda KL je rovnobežná s úsečkou AC)

To isté môžeme urobiť aj pre zvyšné strany štvoruholníka $KLMN$. Vieme teda, že $KL \parallel AC \parallel MN$ a $LM \parallel BD \parallel NK$.

Ukázali sme, že dvojice protiľahlých strán štvoruholníka $KLMN$ sú navzájom rovnobežné, a teda vidíme, že ide o rovnobežník. Zadanie nám hovorí, že všetkými bodmi tohoto rovnobežníka prechádza kružnica a teda je tetivový (vpísaný do kružnice).

Pre tetivové štvoruholníky platí, že súčet veľkostí ich protiľahlých uhlov je 180°. Pre rovnobežníky platí, že protiľahlé uhly sú zhodné. Konjunkcia týchto tvrdení nám implikuje, že štvoruholník $KLMN$ má všetky uhly pravé ($180° = 2\alpha$, $\alpha = 90°$).

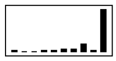
Ako sme už ukázali, úsečky AC a KL sú rovnobežné. Aj úsečky BD a KN sú rovnobežné. Z toho vyplýva že úsečky AC a BD zvierajú taký istý uhol ako úsečky KL a KN, ktorý je uhlom štvoruholníka $KLMN$, a teda je pravý.

Komentár: Drvivá väčšina tých, ktorí správne pochopili zadanie, zvládla úlohu aj správne vyriešiť. Našli sa však aj riešitelia, ktorí sa chybne domnievali, že musí ísť o kružnicu vpísanú do štvoruholníka $ABCD$, čím úlohu značne okresali iba na jednu konkrétnu situáciu.

Za opravovateľov si ešte dovolíme podotknúť, že je prehľadnejšie označovať vrcholy rôznymi písmenami, ako iba indexovať jedno písmeno (napríklad S_1, S_2, ...).

2. Opravovali: Žanetka Semanišinová, Kristín Mišlanová

Počet riešiteľov: 47



Máme riadok, v ktorom je 1000 čísel. Pod tento riadok pridáme ďalší tak, že pod každým číslom a je napísaná hodnota $f(a)$, kde $f(a)$ je počet výskytov čísla a v predchádzajúcom riadku. Takto postupne pridávame ďalšie riadky. Dokážte, že po pridaní dostatočného počtu riadkov budú pod sebou dva rovnaké riadky.

Riešenie:

V pôvodnom riadku máme 1000 náhodných čísel. V každom ďalšom nami napísanom riadku sú už iba čísla z rozsahu 1 až 1000, keďže vyjadrujú početnosť nejakých čísel v riadku.

Pozrime sa na ľubovoľný nami napísaný riadok v tejto postupnosti. Keď sa v ňom na nejakej pozícií nachádza číslo x, tak to znamená, že v predchádzajúcom riadku existovalo nejaké číslo a, ktoré sa tam vyskytlo x-krát, a teda sme zaznačili pod neho jeho početnosť. Hodnotu x sme tým pádom museli zapísať pod každý prvok a v predchádzajúcom riadku. Znamená to, že v riadku, ktorý skúmame, sa hodnota x musí nachádzať aspoň x-krát. Do ďalšieho riadku pod prvok x preto určite napíšeme číslo rovné alebo väčšie, ako je ono samotné (keďže jeho početnosť v riadku je minimálne x).

Toto platí pre všetky čísla v riadku, takže hodnota na každej pozícií sa v každom kroku buď zväčší alebo nezmení. Kroky, v ktorých sa nám na aspoň jednej pozícií hodnota zväčšila, však nemôžeme robiť do nekonečna, keďže každé číslo je zhora ohraničené 1000. Raz teda musíme spraviť krok, v ktorom sa nám už žiadna hodnota nezväčšila. Vtedy budeme mať pod sebou dva rovnaké riadky.

Komentár: Väčšina z vás zvládla úlohu vyriešiť na 9 bodov, nie vždy to však boli najelegantnejšie riešenia. V úlohách ako je táto, kde sa neopierame o žiadne rovnice, deliteľnosti či geometrické obrázky, ale len potrebujeme vysvetliť slovne nejakú úvahu, je formulácia myšlienok veľmi podstatná. Vrelo preto odporúčame po sebe niekedy prečítať, čo ste vytvorili. A keď nie celé riešenie, tak aspoň poslednú vetu, na ktorú práve nadväzujete.

3. Opravovali: Kubo Genči, Martin Spišák

Počet riešiteľov: 53

Je daná rovnica $x!y!z! = t!$, kde x, y, z, t sú prirodzené čísla väčšie ako jedna. Ukážte, že existuje nekonečne veľa štvoríc (x, y, z, t), ktoré spĺňajú túto rovnicu.
Pozn.: $n!$ je číslo $n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$.

Riešenie:

Vezmime si zadanú rovnicu a pozrime sa na ňu takto: $(x!y!)z! = t!$. Vidíme, že na pravej strane rovnosti násobíme faktoriál s nejakým číslom (to, že ide o súčin dvoch faktoriálov nás teraz nezaujíma) a výsledkom má byť opäť faktoriál. V takom prípade sa nám oplatí povedať, že $x!y! = z + 1$ a následne dostávame $(z+1)z! = (z+1)! = t!$.

Teraz nám stačí ukázať, že vieme vytvoriť nekonečne veľa štvoríc (x, y, z, t) tak, aby nám platila rovnosť $x!y!z! = t!$. Pre zjednodušenie si povedzme, že $x = 42$. Potom $42! \cdot y! = z + 1$, pričom y môže byť ľubovoľné prirodzené číslo. Teraz už môžeme (z prvej časti riešenia) vidieť, že $z = 42! \cdot y! - 1$ a $t = (42! \cdot y!) \cdot (42! \cdot y! - 1)! = (42! \cdot y!)!$. V takom prípade sme našli spôsob ako vytvoriť nekonečne veľa štvoríc (x, y, z, t). Pre ľubovoľné prirodzené číslo y takto dostávame štvoricu $(42, y, 42! \cdot y! - 1, (42! \cdot y!)!)$.

Komentár: Sme radi, že pre vás bola úloha taká ľahká. Nabudúce si však dajte pozor na to, či vyjadrujete svoje myšlienky naozaj v takom poradí, aby to dávalo zmysel.

4. Opravoval: Dano Onduš

Počet riešiteľov: 23

Majme n nenulových čísel, ktorých súčet je 0. Ukážte, že je možné ich očíslovať tak, aby platila nerovnosť:

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1 < 0.$$

Riešenie:

Platí $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$, preto aj druhá mocnina tohoto výrazu je nulová. Po roznásobení dostaneme

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) + 2(a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n) = 0$$

Prvá zátvorka je určite kladná (keďže ide o nenulové čísla), čiže druhá musí byť záporná. Zároveň platí, že aj ak túto zátvorku vynásobíme ľubovoľným prirodzeným číslom (okrem nuly), tak bude stále záporná.

Teraz sa pozrime na naše čísla. Uvažujme všetky ich možné permutácie a pozrime sa na to, ako bude vyzerať súčet zo zadania. Pre každú permutáciu dostaneme súčet n súčinov, pričom každé a_i sa bude nachádzať práve v dvoch z týchto súčinov. Ak následne sčítame tieto súčty cez všetky rôzne permutácie, tak dostaneme súčet, v ktorom sa bude každá dvojica a_ia_j pre $i \neq j$ nachádzať rovnako veľa krát. Nepotrebujeme vedieť presne, koľko ich tam bude, stačí nám, že zo symetrie platí, že to bude rovnako veľa. Aby neplatila nerovnosť v zadaní, tak musí byť súčet pre každú permutáciu nezáporný, čiže aj súčet cez všetky permutácie musí byť nezáporný.

To je očividne spor, keďže má platiť $k(a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{n-1}a_n) \geq 0$, ale už sme ukázali, že $(a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{n-1}a_n) < 0$.

Komentár: Väčšina z vás riešila úlohu podobne ako vo vzorovom riešení. Umocnenie na začiatku ste zvládli takmer všetci, väčší problém bol ukázať, ako využiť permutácie daných čísel. Niektorým sa nepodarilo rozdeliť súčet všetkých dvojíc na súčty zodpovedajúce permutáciám. Navyše ste často nezvládli presne vyčísliť, koľkokrát sa bude každá dvojica vyskytovať v súčte cez všetky permutácie, za čo som však body nestrhával, keďže nám úplne stačí vedieť, že je to rovnako veľa, vďaka čomu je vskutku veľa 9 bodových riešení.

5. Opravovali: Martin Masrna, Roman Staňo

Počet riešiteľov: 34

Dokážte, že ľubovoľné celé číslo môže byť napísané ako súčet 5 tretích mocnín celých čísel.

Riešenie:

Najprv dokážeme pomocné tvrdenie: každý celočíselný násobok 6 vieme zapísať ako súčet štyroch tretích mocníc celých čísel. Voľbou $(x+1)$, $(x-1)$, $(-x)$, $(-x)$, kde $x \in Z$ dostávame:

$$(x+1)^3 + (x-1)^3 + (-x)^3 + (-x)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x^3 - x^3 = 6x,$$

čo sme chceli dokázať. Teraz tvrdenie rozšírime na päť mocnín tak, že pridáme mocninu, ktorá nám vygeneruje každý zo zvyškov po delení šiestimi – tým pokryjeme všetky celé čísla.

$$\begin{aligned}
0^3 &\equiv 0 \pmod 6 &&\Longrightarrow (x+1)^3 + (x-1)^3 + (-x)^3 + (-x)^3 + 0^3 &&= 6x,\\
1^3 &\equiv 1 \pmod 6 &&\Longrightarrow (x+1)^3 + (x-1)^3 + (-x)^3 + (-x)^3 + 1^3 &&= 6x+1,\\
2^3 &\equiv 2 \pmod 6 &&\Longrightarrow (x+1)^3 + (x-1)^3 + (-x)^3 + (-x)^3 + 2^3 &&= 6(x+1)+2,\\
3^3 &\equiv 3 \pmod 6 &&\Longrightarrow (x+1)^3 + (x-1)^3 + (-x)^3 + (-x)^3 + 3^3 &&= 6(x+3)+3,\\
(-2)^3 &\equiv 4 \pmod 6 &&\Longrightarrow (x+1)^3 + (x-1)^3 + (-x)^3 + (-x)^3 + (-2)^3 &&= 6(x-1)-2,\\
(-1)^3 &\equiv 5 \pmod 6 &&\Longrightarrow (x+1)^3 + (x-1)^3 + (-x)^3 + (-x)^3 + (-1)^3 &&= 6x-1,
\end{aligned}$$

odkiaľ už vidno, že každé celé číslo je možné zapísať ako práve jeden z výrazov v pravom stĺpci tabuľky a následne je možné zvoliť päť tretích mocnín celých čísel, ktoré v súčte dávajú dané číslo.

Komentár: Riešenie ste našli takmer všetci. Niektorí vo svojej hlave, iní (takmer polovica) na matematických fórach, kde bolo voľne dostupné. Chceme vám pripomenúť, že ak nájdete riešenie v literatúre je vždy nutné uviesť zdroj. Na záver dodáme, že táto úloha je zjednodušenou verziou populárneho otvoreného problému, a síce či vieme zapísať ľubovoľné celé číslo ako súčet štyroch tretích mocnín celých čísel. Je dokázané, že to je možné, pre každé číslo okrem čísel v tvare $9x \pm 4$ a $108x \pm 38$ pre $x \in Z$, pre ktoré riešenie zatiaľ nie je známe.

6. **Opravoval: Tomáš Kocák**

Počet riešiteľov: 9

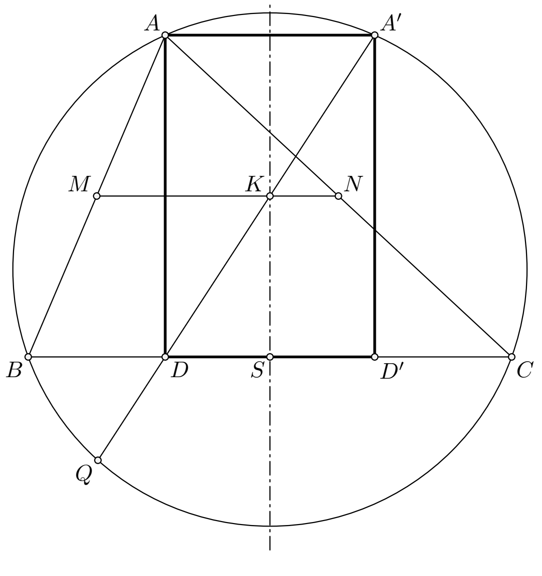
Nech ABC je ostrouhlý trojuholník s $|AB| < |AC|$. Nech M, N sú postupne stredy strán AB a AC a nech AD je výška v tomto trojuholníku. Na úsečke MN zvolíme taký bod K, že $|BK| = |CK|$. Polpriamka KD pretína kružnicu opísanú trojuholníku ABC v bode Q. Dokážte, že body C, N, K, Q ležia na jednej kružnici.

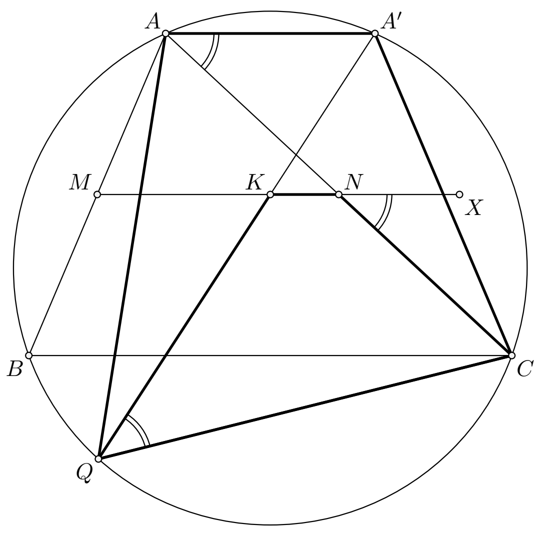
Riešenie:

Nech A' a D' sú obrazy bodov A a D v osovej súmernosti podľa osi strany BC. Body A' a D' majú niekoľko pekných vlastností:

1. A' leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC, pretože celá kružnica je osovo súmerná podľa osi svojej tetivy BC.
2. Bod D' leží na priamke BC, keďže os strany BC je na túto stranu kolmá.
3. Priamka $A'D'$ je kolmá na BC, keďže AD je výška v trojuholníku ABC. Preto $DD'A'A$ je obdĺžnik.
4. Priamka MN je rovnobežná so stranami DD' a AA' a navyše rozpoľuje úsečky AD a $A'D'$, keďže MN je strednou priečkou trojuholníka ABC.
5. Stred uhlopriečky DA' leží na osi strany DD' a na osi strany DA, ktorá je totožná s priamkou MN (tento fakt využijeme neskôr).

Teraz sa pozrime na bod K. Zo zadania vieme, že KBC je rovnoramenný trojuholník a preto K leží na osi strany BC. Táto os je navyše aj osou strany DD' v obdĺžniku $DD'A'A$. Navyše bod K leží aj na priamke MN, a teda je aj stredom uhlopriečky DA' (5. bod). Z toho dostávame, že body D, K, A' ležia na priamke, a teda aj bod Q leží na rovnakej priamke ako tieto 3 body. Dostávame tak situáciu ako na druhom obrázku.





Vieme, že štvoruholník $QCAA'$ je tetivový (všetky 4 body ležia na kružnici opísanej trojuholníku ABC), a preto uhly CQA' a CAA' sú zhodné. Ďalej vieme, že priamka MN je rovnobežná s AA' (4. bod), a preto uhly CAA' a CNX sú zhodné (X je ľubovoľný bod na polpriamke opačnej k polpriamke NM). Z toho už priamo dostaneme, že súčet veľkostí uhlov CQK a CNK je 180°.

Komentár: Najťažšia časť úlohy bola dokreslenie bodu A'. S týmto bodom už úloha nebola veľmi ťažká a všetci, ktorí si tento bod dokreslili, už nemali veľa problémov pri riešení úlohy. Ako sa ale dá prísť na to, že si treba dokresliť tento bod? Nie je to vôbec intuitívna vec. V tejto úlohe sa nám ale ponúkala kružnica opísaná trojuholníku ABC. Jedna z možností na to, aby sme mohli prenášať vnútorné uhly v štvoruholníku $QCNK$, je predĺžiť úsečku QK a vytvoriť tak bod A' na kružnici.

Autori vzorových riešení: Žaneta Semanišinová, Martin Masrna, Kristína Mišlanová, Roman Staňo, Peter Kovács, Daniel Onduš, Jakub Genči

Konečné poradie Zimného semestra 43. ročníka

P.	Meno a priezvisko	Kat.	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
1.	Lenka Hake	S2	GAlejKE	52	9	9	9	9	9	9	106
2.	Norbert Micheľ	S2	GPoštKE	49	9	9	9	7	9	6	99
3.	Dorota Porubská	S3	GLStöBJ	51	9	9	9	9	9	2	98
4.	Matej Hanus	S3	GPoštKE	45	9	9	9	9	9	0	90
5.	Viktória Brezinová	S4	GAlejKE	43	9	9	9	9	9	-	88
6.	Matúš Masrna	S1	GPoštKE	33	9	8	9	9	9	-	86
7.	Timea Szöllősová	S3	GAMČABA	35	9	9	9	5	9	9	85
8.	Filip Baltovič	S1	GAlejKE	38	9	9	9	9	-	-	83
9.	Adam Garafa	S1	GPoštKE	41	5	9	9	-	9	-	82
10.	Martin Nemjo	S2	GAlejKE	27	9	9	9	9	9	-	81
11.	Jakub Farbula	S2	GAlejKE	25	9	9	9	9	9	-	79
12.	Martin Števko	S4	GAlejKE	42	9	9	9	-	-	9	78
13.	Radoslav Jochman	S1	GAlejKE	42	9	7	9	1	0	-	77
14.	Karin Eštoková	Z9	GMRŠKE	30	7	9	9	3	9	-	76
15. - 16.	Michal Masrna	S3	GPoštKE	27	9	9	9	9	9	-	72
	Radovan Lascsák	S3	GPoštKE	37	9	9	8	-	9	-	72
17. - 18.	Martin Kliment	S1	GPoštKE	40	9	3	9	1	-	-	71
	Tomáš Chovančák	S3	GPoštKE	35	9	9	9	-	9	-	71
19. - 22.	Frederik Ténai	S2	GKatkKE	32	9	9	9	9	-	-	68
	Róberta Juríková	S4	GVBNPD	32	9	9	9	9	-	-	68
	Filip Csonka	S4	GAlejKE	32	9	9	9	-	9	-	68
	Michaela Rusnáková	S2	GAlejKE	14	9	9	9	9	9	-	68
23. - 24.	Ján Richnavský	S2	GPoštKE	21	9	9	9	5	9	-	67
	Jakub Mičko	S1	GPoštKE	30	3	7	9	-	9	-	67
25.	Erik Novák	S1	GPoštKE	31	9	7	9	-	-	-	65
26.	Tomáš Krupa	S3	GPoštKE	31	9	7	9	-	8	-	64
27. - 29.	Patrik Paľovčík	S3	GPoštKE	36	9	9	9	-	-	-	63
	Štefánia Glevitzká	S4	GVBNPD	36	9	9	9	-	-	-	63
	Gabriela Genčiová	S2	GPoštKE	27	9	9	9	-	9	-	63
30. - 31.	Benjamín Mravec	S3	GPoštKE	28	9	7	9	-	9	-	62
	Timea Jakubócyová	S2	BGMHSuč	24	9	9	9	9	-	1	62
32. - 33.	Lujza Milotová	S2	GPoštKE	19	7	4	9	9	9	-	61
	Adam Džavoronok	Z9	ZSlobKE	27	1	6	9	-	9	-	61
34. - 35.	Klára Hricová	S1	GPoštKE	6	9	9	9	9	9	-	60
	Samuel Krajči	S3	GAlejKE	43	9	-	-	-	-	8	60
36.	Oszkár Urbán	S1	GPoštKE	34	0	7	9	-	-	-	59
37. - 39.	Martin Mihálik	S4	GAlejKE	30	9	-	9	-	9	-	57
	Martin Albert Gbúr	S3	GPoštKE	27	7	9	9	-	5	-	57
	Alex Blandón	S2	GPoštKE	28	9	6	9	5	-	-	57
40. - 41.	Branislav Pastula	S3	GPoštKE	33	5	5	5	-	-	6	54
	Martin Šalagovič	S2	GAlejKE	18	9	9	9	-	9	-	54
42. - 43.	Alex Gašparíková	S2	GAMČABA	26	9	9	9	-	-	-	53
	Matej Tarča	S3	GPoštKE	19	7	9	9	-	9	-	53
44.	Martin Mičko	S4	GAlejKE	22	3	9	9	-	9	-	52
45. - 46.	Dušan Oberta	S3	GŠkolSN	24	1	9	8	9	-	-	51
	Miriam Horváthová	Z9	ZKomeMI	28	0	5	9	-	-	-	51
47.	Miriam Magočiová	S3	GPoštKE	22	9	-	9	-	9	-	49
48.	Zdeněk Pezlar	S1	GJaroBR	20	8	-	9	-	-	-	46
49.	Martin Andričík	S2	GPoštKE	14	6	9	3	-	5	-	37

P.	Meno a priezvisko	Kat.	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
50.	Michal Vorobel	S2	GJARMPO	18	9	-	9	-	-	-	36
51.	Ondrej Ovčar	S1	GAlejKE	30	-	-	-	-	-	-	30
52.	David Šlosar	S2	GPoštKE	23	2	-	4	-	-	-	29
53. - 54.	Erik Berta	S4	GAlejKE	9	0	0	9	-	9	-	27
	Maximilián Pándy	S1	GPoštKE	0	0	9	9	-	-	-	27
55.	Martin Kopčány	Z9	GJChaBR	25	-	-	-	-	-	-	25
56. - 57.	Nicol Kršková	S2	GPoštKE	22	-	-	-	-	-	-	22
	Peter Kochelka	S1	GJGTBB	22	-	-	-	-	-	-	22
58.	Kristián Paľuch	S2	GPoštKE	11	-	-	9	-	-	-	20
59. - 61.	Tomáš Feciskanin	S2	GAlejKE	18	-	-	-	-	-	-	18
	Adam Mackanič	S2	GPoštKE	18	-	-	-	-	-	-	18
	Ela Vojtková	S1	GAMČABA	18	-	-	-	-	-	-	18
62.	Matúš Farkaš	S2	GAlejKE	17	-	-	-	-	-	-	17
63.	Ondrej Tomášik	S1	GJGTBB	11	-	-	-	-	-	-	11
64. - 65.	Tamara Timočková	S1	GŠtúrMI	9	-	-	-	-	-	-	9
	Samuel Chaba	S4	LEAFABA	0	0	-	-	-	9	-	9

Názov STROM – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 3 • December 2018 • Zimný semester 43. ročníka (2018/2019)
Internet: `http://seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet: `https://zdruzenie.strom.sk`
E-mail: `info@strom.sk`

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2016-9485/41562:71-10E0.

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM ĽUDSKÉ ZDROJE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje

www.minedu.sk www.employment.gov.sk/sk/esf/ www.itakademia.sk