STROM
Korešpondenčný matematický seminár

Ahojte!

Ako ste si určite všimli, vonku sa dejú čudné veci. Napríklad sa stmieva už o štvrtej poobede, z času na čas padne nejaká tá vločka, v oknách a na balkónoch sú svetielka, a dokonca aj stromčeky začínajú zo záhadných dôvodov svetielkovať a blikať. Všade vonia kapustnica a iné dobroty. Mňaam. To môže znamenať len jednu vec. Buď sa blížia Vianoce, alebo sa deje niečo iné. Ale tak asi to bude tými Vianocami. To, na čo sa práve pozeráte, je posledný tohtoročný Stromácky časopis. Pre tých najlepších z vás sa už pripravuje skvelé sústredko, ktoré sa uskutoční v Danišovciach 2. – 7. 2. 2020. Tešíme sa na vás a prajeme krásne Vianoce a šťastný nový rok 2020.
PS: Nezabudnite riešiť aj letný semester :).

Navždy vaši STROMisti

Vianočný Maxiklub

Tradične v čase Vianoc sa bude konať Vianočný Maxiklub, čo je vianočné stretnutie STROMákov! Vítaní sú všetci, účastníci, vedúci, bývalí vedúci a každý, kto má rád STROM a STROMákov. Stretneme sa 21. 12. o 15:00 v miestnosti SJSP19 na PF UPJŠ, Jesenná 5 v Košiciach, ktorá nám bude k dispozícií do 18.00. Okrem seba nezabudnite doniesť aj vianočnú náladu a nejaké fajné jedlo, určite sa zíde :).

1. Opravovali: **Viki Brezinová a Erik Berta**

Počet riešení: 43

Určte, pre ktoré kladné celé čísla n existuje tabuľka $n \times n$ obsahujúca n^2 kladných celých čísel, pre ktorú platí, že pre ľubovoľnú voľbu i a j (môžu nadobúdať hodnoty od 1 po n) je v políčku v i-tom riadku a j-tom stĺpci počet všetkých hodnôt j, ktoré sa vyskytujú v i-tom stĺpci.

Riešenie

Pozrime sa, ako by musela vyzerať ľubovoľná tabuľka, ktorá spĺňa podmienku zo zadania. Zoberme si ľubovoľný i-tý riadok tabuľky. Keďže ju vypĺňame kladnými celými číslami, tak v každom políčku musí byť číslo ≥ 1. Preto súčet čísel v riadku musí byť aspoň n (v riadku je n políčok).
Vieme, že prvé číslo v riadku vyjadruje, koľko jednotiek je v i-tom stĺpci, …, j-té číslo vyjadruje, koľko čísel j je v i-tom stĺpci, …, posledné číslo v riadku vyjadruje, koľko čísel n je v i-tom stĺpci. Z toho vyplýva, že súčet čísel v riadku vyjadruje, koľko čísel od 1 do n je v i-tom stĺpci, takže tento súčet je najviac n, keďže v stĺpci je n políčok a na každom práve jedno číslo.
Zistili sme, že súčet čísel v ľubovoľnom riadku je aspoň n a zároveň najviac n, takže súčet čísel v každom riadku musí byť práve n. Keďže dopĺňame čísla ≥ 1, tak každé číslo v tabuľke musí byť práve 1 (inak by súčet v nejakom riadku bol väčší ako n). Ak by n bolo ≥ 2, tak na políčku v prvom riadku a druhom stĺpci je 1, čo znamená, že niekde v prvom stĺpci má byť číslo 2, čo je spor s tým, že celá tabuľka je vyplnená len jednotkami. Preto pre $n \geq 2$ taká tabuľka neexistuje.
Pre $n = 1$ tabuľka vyplnená jednou jednotkou zjavne spĺňa podmienku zo zadania, čiže jediné n vyhovujúce zadaniu je 1.

Komentár

Táto úloha vám nerobila nejaké väčšie problémy, o čom svedčí aj bodové ohodnotenie. Dala sa riešiť dokonca viacerými spôsobmi. Jediným problémom bolo vaše trochu nepresné vyjadrovanie, keď niektorí z vás vo svojom trochu inom dôkaze tvrdili, že ak si vezmú ľubovoľné i, tak nastane spor, čo však v prípade $i = n$ nebola pravda a bolo potrebné to rozobrať zvlášť, alebo povedať, prečo sa pozeráme len na $i \neq n$.

2.

Opravovali: **Martin Spišák a Martin Mihálik**
Počet riešení: 35

Mihál nemá rád čísla s prívlastkom. Má však rád také kladné celé čísla m, pre ktoré je každé z čísel m, $m+1$, $m+2$ a $m+3$ deliteľné svojim ciferným súčtom. Dokážte, že ak posledná cifra v takomto čísle je 8, tak potom predposledná cifra tohto čísla je nutne 9.

Riešenie

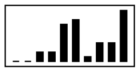
Dôkaz vykonáme sporom: nech teda existuje číslo m také, že jeho posledná cifra je 8 a predposledná je rôzna od 9. Označme s ciferný súčet čísla m. Potom číslo $m+1$ má ciferný súčet $s+1$, číslo $m+2$ má ciferný súčet rovný $s+1-9+1=s-7$ (lebo pričítaním 1 k číslu $m+1$ nastane práve jeden prechod cez desiatku, takže cifra na mieste jednotiek sa zmenší o 9 a cifra na mieste desiatok sa zväčší o 1) a číslo $m+3$ teda bude mať ciferný súčet $s-6$.
Číslo m je párne, teda $m+1$ je nepárne. Číslo $s+1$ je deliteľ čísla $m+1$, takže $s+1$ je nutne nepárne (pretože celočíselným násobkom párneho čísla je vždy párne číslo). Z toho dostávame, že s je párne číslo. Spor potom nastane pri (nepárnom) čísle $m+3$, lebo jeho ciferný súčet $s-6$ je párny, a teda $s-6 \nmid m+3$.

Komentár

S úlohou ste si poradili bravúrne, drvivá väčšina z vás dostala 9 bodov. Najčastejšie ste si zvolili dôkaz sporom (úloha sa dala riešiť aj pracnejším priamym dôkazom, o čom svedčí jedno z riešení, čo sme dostali), čiže miesto ukázania platnosti implikácie „m je Mihálove obľúbené číslo s poslednou cifrou 8“ $\Rightarrow$ „predposledná cifra m je 9“ ste sa snažili ukázať, že negácia tejto implikácie („m je Mihálove obľúbené číslo s poslednou cifrou 8“ a zároveň „predposledná cifra nie je 9“) je nepravdivá. To ste takmer všetci zvládli, no potom sa niektorí z vás rozhodli, že potrebujú ukázať aj to, že ak predposledná cifra je 9, tak ku sporu nedochádza. To ste viacerí nezvládli, pretože ste neuvažovali prípad, keď bude deviatok za sebou viac. Nebolo to však vôbec potrebné ukázať, keďže ste platnosť implikácie už dokázali a táto implikácia platí aj v prípade, že žiadne Mihálove obľúbené číslo s poslednou cifrou 8 neexistuje, teda aj v prípade, že by spor nastal aj s predposlednou cifrou 9.

3.

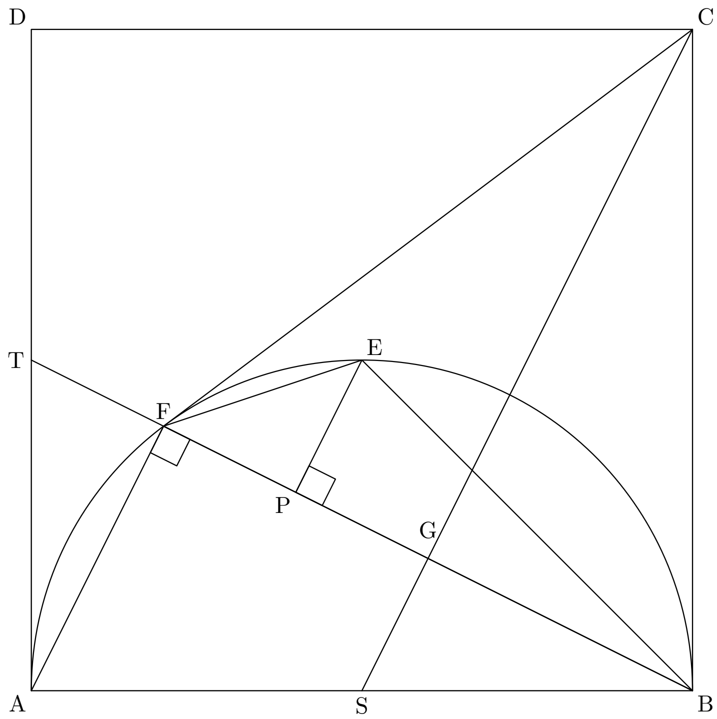
Opravovali: **Žanetka Semanišinová a Kubo Genči**
Počet riešení: 41



Majme štvorec $ABCD$, ktorý má nad stranou AB zostrojenú polkružnicu vo vnútri štvorca $ABCD$. K tejto polkružnici veďme dotyčnicu prechádzajúcu bodom C rôznu od priamky CB a označme jej bod dotyku F. Prienik úsečky BD a polkružnice označíme E. Aký je obsah trojuholníka BEF, ak je dĺžka strany štvorca $ABCD$ rovná 10?

Riešenie

Najprv si popíšme dôležité body na obrázku. Bod T je priesečník priamok AD a BF. S je stred strany AB (a teda je aj stredom polkružnice). Bod G je priesečník úsečiek SC a FB a bod P je päta výšky na stranu FB v trojuholníku BEF.

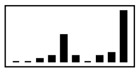


Z Tálesovej kružnice nad priemerom AB je F päta výšky v trojuholníku ABT. Vidíme, že $|FS| = |SB|$ a $|\sphericalangle SFC| = 90^\circ$ (pretože F je bod dotyku). Z Pytagorovej vety pre trojuholníky FSC a SBC dostávame $|FC| = |BC|$, čo znamená, že $FSBC$ je deltoid, takže jeho uhlopriečky sú na seba kolmé.
Ďalej nahliadneme, že T je stred strany AD. Trojuholníky SGB a SBC sú oba pravouhlé s druhým vnútorným uhlom $\sphericalangle CSB$, takže majú zhodné aj zvyšné uhly, menovite $|\sphericalangle SBG| = |\sphericalangle BCS|$. Trojuholníky ABT a BCS majú preto zhodné dva uhly a stranu, čiže sú zhodné a T preto musí ležať v strede AD.
V trojuholníku ABT vieme spočítať, že dĺžka úsečky TB je $5\sqrt{5}$ (z Pytagorovej vety). Teraz môžeme zistiť $|FA|$, keďže obsah ABT je $|AB| \cdot |AT|/2 = 25$ a FA je výška na BT. Dostávame, že $|FA| = 2\sqrt{5}$. Z podobnosti trojuholníkov ABF a SBG (majú dva zhodné uhly a pomer podobnosti 2) dostávame, že $2|SG| = |FA|$.
Teraz sa pozrime na bod E. Vieme, že leží na uhlopriečke štvorca. Zároveň vieme, že polkružnica má polomer 5, čo znamená, že E je priesečník uhlopriečok štvorca. Potom SE a AT sú rovnobežné a rovnako dlhé. Zároveň TE je rovnobežné s AB, a teda $|\sphericalangle ABT| = |\sphericalangle BTE|$ (sú to striedavé uhly). Z toho dostávame zhodnosť trojuholníkov GSB a PET (sú pravouhlé, $|\sphericalangle SBG| = |\sphericalangle PTE|$ a $|SB| = |TE|$), čo znamená, že $|PE| = |SG|$.
Teraz už poznáme dĺžku výšky PE v trojuholníku BEF. Dĺžku strany FB vieme dopočítať z Pytagorovej vety v trojuholníku AFB ako $\sqrt{100-20} = 4\sqrt{5}$. Obsah FBE teda dostaneme ako $\frac{|PE|\times|FB|}{2} = \frac{|SG|\times 4\sqrt{5}}{2} = \frac{|AF|}{2} \times 2\sqrt{5} = \sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 10$.

Komentár

Úloha sa ukázala ako dosť ťažká, čo sa prejavilo aj na vašich bodoch. Ako to už býva pri ťažkých problémoch, človek sa uchýli aj k veciam, ktoré by normálne neurobil, napríklad použije goniometrické funkcie. Hoci to šlo aj bez nich (všetkých, čo ich nepoužili, chválime), riešenie s nimi samozrejme môže byť dobré 9-bodové riešenie. Háčik je v tom, aké hodnoty použijeme. Ako iste viete, pre niektoré veľkosti uhlov sa dajú hodnoty goniometrických funkcií priamo odvodiť pomocou konštánt, ktoré poznáme a vieme s nimi počítať, napr. $\sqrt{2}$.
To však platí len pre zopár šťastných uhlov, pre tie ostatné platí, že ak chceme výraz s nimi upraviť, musíme sa spoľahnúť na výpočtovú techniku, ktorá ich hodnotu spočíta približne a potom výsledky zaokrúhľuje. Tu už by ste mohli tušiť, kde je problém takého riešenia. To, že počítač vám upravil výraz, ktorý ste mu zadali, na 10, je síce fajn, ale ak by sa výsledok rovnal $10 + 10^{-148}$, asi by to bežný softvér nezistil. Napokon je preto váš výsledok matematicky cenný asi podobne, ako by ste ho odmerali pravítkom, len chyba má trochu iný rád. Bodové ohodnotenie takýchto riešení preto nemôže byť vysoké.
Na záver by sme vás chceli poprosiť, aby ste po sebe riešenie vždy prečítali pred tým, než ho odovzdáte. Ak odstránite aspoň časť preklepov a občas doplníte, čo ste v danom kroku použili, bude to mať preukázateľne lepší dopad na mentálne zdravie opravovateľov.

4.
Opravoval: **Peťo Kovács**
Počet riešení: 36



V odľahlej časti mesta stojí niekoľko rovnakých veží s kruhovým pôdorysom. Vandali sa rozhodujú, kde budú sprejovať, pričom na mape si vyznačia bod na obvode veže práve vtedy, keď z daného miesta nevidno žiadnu inú vežu. Dokážte, že celková dĺžka vyznačených oblastí je rovná obvodu jednej veže.

Riešenie

Na začiatok si povedzme, akú časť roviny vidíme z jedného bodu na veži. Z tohto bodu vidíme celú polrovinu, ktorú vymedzuje dotyčnica veže v danom bode a daná veža sa v nej nenachádza. Rozmyslime si, že ak je bod posprejovaný, tak všetky veže ležia v polrovine, ktorá je zatienená.
Intuitívne si vieme rozmyslieť, že posprejované budú iba akési okrajové veže. Poďme túto intuíciu sformulovať matematicky pomocou konvexného obalu bodov. Uvažujme teraz veže ako body v rovine. Konvexným obalom množiny bodov nazveme najmenšiu takú množinu, pre ktorú platí, že ak do nej patria nejaké dva body, tak do nej patrí aj úsečka medzi týmito dvoma bodmi. Vytvorme teda konvexný obal stredov kružníc. Konvexný obal bude mať tvar mnohouholníka, pričom niektoré veže budú vnútri a niektoré vo vrcholoch, prípadne na stranách mnohouholníka.
Najprv sa pozrime na body, ktoré sú na stranách mnohouholníka. Takáto kružnica sa bude nachádzať medzi dvoma kružnicami. Je zjavné, že z jednej kružnice budeme vidieť polovicu tejto kružnice a z druhej druhú polovicu. Tieto kružnice teda posprejované určite nebudú.
Ďalej sa pozrime na kružnice, ktoré sú vnútri mnohouholníka. Ak by na kružnici existoval bod, ktorý nevidíme, muselo by platiť, že viem nakresliť priamku cez stred kružnice tak, aby boli všetky stredy kružníc iba v jednej polrovine za touto priamkou. To sa však nikdy nestane, ak nejde o krajný bod.
Teraz už vieme, že posprejované môžu byť iba veže, ktorých stred je vo vrcholoch mnohouholníka. Pozrime sa teraz, aká časť veže vo vrchole bude posprejovaná. V mnohouholníku má každá veža vo vrchole dve susedné veže (kam vedú hrany) a medzi týmito vežami môžu byť vnútri konvexného uhla nejaké ďalšie. Z každej z týchto susedných veží vidno 180° našej veže, 90° na každú stranu od spojnice stredov. Ľahko teda odvodíme, že uhol, ktorý nevidno, je:

$$360^\circ - (\alpha + 90^\circ + 90^\circ) = 180^\circ - \alpha,$$

kde α je vnútorný uhol mnohouholníka, a teda uhol ktorý zvierajú spojnice stredov susedných kružníc so stredom našej kružnice. O vnútorných uhloch mnohouholníka vieme, že ich súčet je $180°(n-2)$, kde n je počet vrcholov. Ak sa budeme snažiť sčítať nevidené uhly (nevidený uhol pri vrchole V_i označme ω_i) pri každom vrchole, dostaneme:

$$\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n = (180° - \alpha_1) + (180° - \alpha_2) + \cdots + (180° - \alpha_n) = n \cdot 180° - (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n).$$

Keďže vieme, že uhly α_i sú vnútorné uhly konvexného mnohoholníka, poznáme ich súčet. Dostávame teda:

$$\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n = n \cdot 180° - (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) = n \cdot 180° - 180°(n-2) = 360°.$$

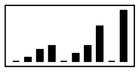
Dokázali sme, že neposprejované časti tvoria celý obvod veže. Ostáva spomenúť, že vieme dostať špeciálne prípady, kedy konvexný obal nie je mnohouholník. A to konkrétne, ak máme iba jednú vežu, vtedy ale zjavne bude posprejovaná časť rovná obvodu celej veže. Ďalší prípad je, ak by boli všetky veže zoradené na jednej priamke. Potom ľahko overíme, že vidno iba polkruhy dvoch najkrajnejších veží, čo je dokopy obvod jednej veže.

Komentár

Tí, ktorí v úlohe nedostali plný počet bodov, zvyčajne zabudli dokázať, že plocha, ktorú sčítavajú, je naozaj práve posprejovaná plocha. Celkovo bol v tejto úlohe problém vyjadriť sa dostatočne matematicky, a to bol často kameň úrazu.

5.

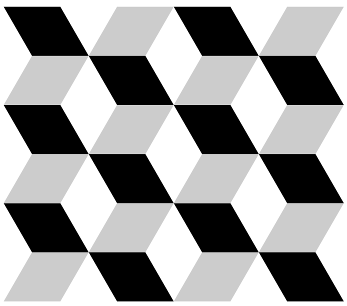
Opravovali: **Martin Masrna a Samo Krajči**
Počet riešení: 36



Dvaja hráči hrajú piškvorky na nekonečne veľkom trojuholníkovom papieri a striedajú sa v ťahoch. Ten, kto je na ťahu, vždy nakreslí svoju značku do niektorého voľného políčka. Vyhrá hráč, ktorý má ako prvý neprerušovanú rovnú radu (smerujúcu jedným z troch možných smerov v mriežke) aspoň n svojich znakov, kde n je nejaké prirodzené číslo. V závislosti na n určte, kto má vyhrávajúcu alebo neprehrávajúcu stratégiu.

Riešenie

Pre $n = 1$ zjavne vyhrá prvý hráč hneď v prvom ťahu.
Pre $n = 2$ má prvý hráč v druhom ťahu tri políčka, ktoré susedia s jeho prvým, čiže jeho súper mu nevie zabrániť v tom, aby nejaké z nich zafarbil a vyhral.
Pre $n = 3$ prvý hráč najprv zafarbí dve susedné políčka (rovnako ako pri $n = 2$). Potom, ak zafarbí ľubovoľné zo štyroch políčok susediacich s tými dvoma už zafarbenými, tak bude mať tri za sebou. Keďže súper mohol zafarbiť iba dve políčka od začiatku hry, tak mu v tom určite nezabráni.
Čo však pre $n = 4$ a viac? Popárujme si políčka v trojuholníkovej sieti tak, ako na obrázku (teda každému políčku priradíme jedného z jeho susedov):



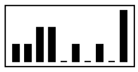
Všimnime si, že keď zoberieme ľubovoľné štyri políčka v rade, tak obsahujú aspoň jeden pár políčok. To znamená, že ak druhý hráč bude robiť to, že zafarbí trojuholník, ktorý tvorí pár s tým, ktorý zafarbil prvý hráč v predchádzajúcom ťahu, tak nikdy nebude taký pár, čo patrí celý prvému hráčovi, a teda nikdy nebudú ani také štyri políčka v rade. Samozrejme, rovnako vie postupovať aj prvý hráč, aby zabránil vo výhre druhému - nikdy mu nedovolí zafarbiť jeden celý pár. Takže pre n väčšie ako 4 nikto nemá víťaznú stratégiu.

Komentár

Veľkej časti z vás sa podarilo prísť na neprehrávajúcu stratégiu pre druhého hráča (alebo aspoň nájsť ju na internete, z čoho nie sme nadšení...), no mnohí zabudli ukázať, že nemôže mať vyhrávajúcu, alebo teda, že aj prvý hráč má neprehrávajúcu stratégiu.

6. Opravovali: **Dano Onduš a Kristín Mišlanová**

Počet riešení: 11



Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla x, y platí: $f(xy + f(x)) = xf(y)$.

Riešenie

Keďže rovnosť musí platiť pre všetky reálne čísla x, y, tak sa môžeme pozrieť, čo dostaneme z niektorých konkrétnych dosadení. Pre $[0, y]$ dostávame:

$$f(f(0)) = 0.$$

Keď aplikujeme funkciu f na rovnaké hodnoty, tak musíme dostať rovnaký výsledok, takže z toho máme priamo rovnosť:

$$f(f(f(0))) = f(0).$$

Následne vezmime dosadenie $[f(0), 0]$:

$$f(f(f(0))) = f(0)f(0).$$

Spojením posledných dvoch rovníc máme:

$$f(0) = f^2(0).$$

Z čoho dostávame, že $f(0) = 0$ alebo $f(0) = 1$. Následne rozoberieme oba tieto prípady.

1. možnosť: $f(0) = 1$

Pre dosadenie $[0, 0]$ s využitím $f(0) = 1$ máme:

$$\begin{aligned} f(f(0)) &= 0 \\ f(1) &= 0. \end{aligned}$$

Pri dosadení $[x, 0]$ a opäť využití $f(0) = 1$ dostaneme:

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= xf(0) \\ f(f(x)) &= x. \end{aligned}$$

Vďaka tejto vlastnosti vieme dokázať, že funkcia f musí byť prostá. Čo znamená, že ak platí $f(x) = f(y)$, tak potom nutne $x = y$. Vezmime si $f(x) = f(y)$ a aplikujme funkciu f na obe strany. Dostaneme $f(f(x)) = f(f(y))$, z čoho následne vďaka poslednému dosadeniu vieme odvodiť $x = f(f(x)) = f(f(y)) = y$.

Teraz využijeme posledné dosadenie $[x, 1]$ a fakt, že funkcia f je prostá a $f(1) = 0$:

$$\begin{aligned} f(x + f(x)) &= xf(1) \\ f(x + f(x)) &= 0 \\ f(x + f(x)) &= f(1) \\ x + f(x) &= 1 \\ f(x) &= 1 - x. \end{aligned}$$

2. možnosť: $f(0) = 0$

Pri dosadení $[x, 0]$ a využí $f(0) = 0$ máme:

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= xf(0) \\ f(f(x)) &= 0. \end{aligned}$$

Pre dosadenie $[f(x), x]$ dostávame:

$$\begin{aligned} f(xf(x) + f(f(x)) &= f^2(x) \\ f(xf(x)) &= f^2(x). \end{aligned}$$

Teraz vezmeme dosadenie $[x, x]$ a následne na obe strany aplikujeme funkciu f:

$$\begin{aligned} f(x^2 + f(x)) &= xf(x) \\ f(f(x^2 + f(x)) &= f(xf(x)). \end{aligned}$$

Na ľavej strane máme dvakrát funkciu f použitú na nejaké reálne číslo $x^2 + f(x)$. Ako sme však ukázali, pre ľubovoľné reálne číslo t platí $f(f(t)) = 0$. Spojením týchto vlastností máme:

$$f(xf(x)) = 0.$$

Dokopy dostávame:

$$f^2(x) = f(xf(x)) = 0$$

$$f(x) = 0.$$

Pri oboch možnostiach potrebujeme ešte spraviť skúšku, či dané funkcie vyhovujú, čo v obidvoch prípadoch platí. Preto sú riešením funkcie $f(x) = 0$ a $f(x) = 1 - x$.

Komentár

Vo väčšine prípadov sa vám podarilo nájsť všetky riešenia tejto úlohy, často ste však použili vlastnosť funkcie, ktorú ste predtým nedokázali. Napríklad, že funkcia je prostá alebo lineárna. Ukázať linearitu z takéhoto predpisu je pomerne náročné a nikomu sa to nepodarilo inak, ako tak, že našiel všetky riešenia.

Konečné poradie zimného semestra 44. ročníka

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
1. - 2.	Matej Hanus	S4	GPoštKE	54	9	9	9	9	9	9	108
	Dorota Porubská	S4	GLStöBJ	54	9	9	9	9	9	9	108
3.	Dušan Oberta	S4	GŠkolSN	40	9	9	4	8	9	9	88
4.	Martin Kopčány	S1	GJChaBR	46	9	9	2	7	3	-	85
5. - 6.	Oskar Hritz	S1	GPoštKE	43	9	-	9	5	7	2	84
	Jiří Kalvoda	S3	GJaroBR	39	9	9	9	9	9	-	84
7.	Peter Kochelka	S2	GJGTBB	35	9	9	4	9	7	7	83
8.	Martin Kliment	S2	GPoštKE	35	9	9	5	9	9	-	81
9. - 11.	Klára Pernicová	S3	GJaroBR	41	9	9	4	7	7	-	77
	Zdeněk Pezlar	S2	GJaroBR	42	9	9	8	-	2	5	77
	Lenka Hake	S3	GAlejKE	39	9	9	9	9	2	-	77
12.	Róbert Sabovčík	S4	GPoštKE	40	9	9	9	-	9	-	76
13.	Václav Janáček	S3	GJaroBR	42	8	9	2	5	9	-	75
14.	Timea Szöllősová	S4	GAMČABA	36	9	9	9	9	-	-	72
15.	Maximilián Pándy	S2	GPoštKE	17	9	9	9	9	9	-	71
16.	Samuel Banas	S3	LEAFABA	29	9	9	3	9	9	-	68
17. - 18.	Miriam Horváthová	S1	GŠtúrMI	30	9	9	4	4	2	-	67
	Matúš Masrna	S2	GPoštKE	31	9	9	-	9	9	-	67
19. - 21.	Radovan Lascsák	S4	GPoštKE	34	9	-	5	9	9	-	66
	Karin Eštoková	S1	GMRŠKE	36	9	-	8	4	-	-	66
	Michal Masrna	S4	GPoštKE	39	9	9	9	-	-	-	66
22. - 25.	Erik Novák	S2	GPoštKE	31	9	9	-	8	7	-	64
	Martin Albert Gbúr	S4	GPoštKE	39	9	9	-	-	7	-	64
	Patrik Paľovčík	S4	GPoštKE	34	9	9	5	-	7	-	64
	Sara Gašparová	S1	GAMČABA	31	9	9	-	-	6	-	64
26.	Branislav Pastula	S4	GPoštKE	36	9	9	6	3	-	-	63
27.	Ľubomír Vargovčík	S1	GPoštKE	28	9	-	4	9	3	-	62
28.	Štefan Vašak	S1	GPoštKE	29	9	-	5	9	-	-	61
29.	Lujza Milotová	S3	GPoštKE	26	9	9	5	4	7	-	60
30.	Alex Blandón	S3	GPoštKE	17	9	9	5	9	9	-	58
31. - 33.	Tomáš Krupa	S4	GPoštKE	34	9	-	3	-	7	3	56
	Oszkár Urbán	S2	GPoštKE	27	9	0	7	4	9	-	56
	Tomáš Chovančák	S4	GPoštKE	34	6	6	4	-	6	-	56
34.	Ján Richnavský	S3	GPoštKE	32	6	9	-	2	6	-	55
35. - 36.	Gabriela Genčiová	S3	GPoštKE	24	7	9	4	4	6	-	54
	Natália Čigašová	S1	GPoštKE	22	9	-	5	4	5	-	54
37.	Martin Nemjo	S3	GAlejKE	24	9	9	9	-	-	2	53
38.	Benjamín Mravec	S4	GPoštKE	26	9	9	-	-	7	-	51
39. - 40.	Adela Horváthová	Z9	ZDnepKE	26	-	-	7	4	5	-	49
	Timea Jakubócyová	S4	BGMHSuč	19	9	-	9	9	3	-	49

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
41.	David Belobrad	S3	GAMČABA	21	6	7	8	3	3	0	48
42.	Ivan Kushpel	S2	GAMČABA	18	9	9	7	4	-	-	47
43.	Martin Andričík	S3	GPoštKE	25	4	-	7	9	-	1	46
44.	Bianka Gurská	Z9	GAlejKE	25	-	0	8	-	1	-	42
45.	Matej Štencel	S3	GPoštKE	36	-	-	-	-	-	-	36
46.	Paulína Dujavová	S2	GJARMPO	13	-	9	4	9	-	-	35
47.	Michal Vorobel	S3	GJARMPO	9	9	-	5	8	-	3	34
48.	Jakub Kulka	S1	GMRŠKE	19	-	-	5	4	-	-	33
49.	Anežka Kasalová	S1	GChDPHA	31	-	-	-	-	-	-	31
50.	Adam Garafa	S2	GPoštKE	25	-	-	-	-	-	-	25
51.	Matej Hajduk	S2	GPoštKE	24	-	-	-	-	-	-	24
52.	Radoslav Jochman	S2	GAlejKE	21	-	-	-	-	-	-	21
53.	Michal Grešš	S2	GsvTAKE	16	-	-	-	-	-	-	16
54.	Bianka Matisová	S4	GKrompa	3	-	-	-	-	-	-	3
55.	Barbora Čemanová	S1	GPMl5KE	2	-	-	-	-	-	-	2

Názov: STROM – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 3 • December 2019 • Zimný semester 44. ročníka (2019/2020)
Web: seminar.strom.sk
E-mail: strom@strom.sk

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Web: zdruzenie.strom.sk
E-mail: info@strom.sk

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM ĽUDSKÉ ZDROJE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje

www.minedu.sk www.employment.gov.sk/sk/esf/ www.itakademia.sk