STROM
Korešpondenčný matematický seminár

Čaute!

Nastal máj, lásky čas, vonku všetko kvitne, školský rok sa chýli ku koncu (áno, naozaj, aj keď sa to možno nezdá) a vy sa už iste neviete dočkať čerstvo opravených a obodovaných riešení. Spolu s nimi sa však končí aj 44. ročník STROM-u. Ale budúci školský rok začne ďalší, tak ho určite nepremeškajte. Veríme, že už teraz sa neviete dočkať nových krásnych zadaní, ktoré pre vás pripravíme. My sa zase už teraz tešíme na vaše riešenia. Za normálnych okolností by sme vám popriali pekné leto, veľa zážitkov a oddychu (hlavne od školy), aby ste načerpali sily na ďalší ročník STROM-u. Teraz je ale veľa vecí hore nohami. No my vám aj tak prajeme pekné leto, veľa zážitkov a oddychu (hlavne od školy), aby ste načerpali sily na ďalší ročník STROM-u. :)

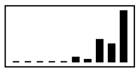
Navždy vaši **STROM**áci

TMM

Aj toto leto môžeš stráviť týždeň plný zábavy s kamarátmi a super vedúcimi na Tábore mladých matematikov. Môžeš sa tešiť na neopakovateľný program, zábavne podanú matiku a príjemnú spoločnosť.
TMM sa bude konať 16. – 23. augusta v Penzióne pod Sitnom na Počúvadlianskom jazere a je určené pre budúcich siedmakov až budúcich druhákov na strednej škole. Kompletné informácie, ako aj prihlasovanie, nájdeš na našej stránke. Nenechávaj si prihlásenie na poslednú chvíľu, lebo počet miest je obmedzený. Tešíme sa na teba.

1.

Opravovali: **Dano Onduš, Erik Berta**
Počet riešení: 44



Majme čísla od 1 do n. Pre každé n nájdite najväčšie k také, že naše čísla vieme rozdeliť do k skupín s rovnakým súčtom.

Riešenie

Súčet čísel od 1 po n je rovný $n(n+1)/2$. Keďže čísla v každej z k skupín majú rovnaký súčet (označme ho s), tak nutne platí, že $k \cdot s = n(n+1)/2$. To znamená, že maximálne k dosiahneme práve pri minimálnom s.
Vidíme, že s musí byť najmenej n, pretože aj číslo n sa nachádza v nejakej skupine. Ak je n nepárne, tak ho vieme nechať samostatnej skupine a zvyšné čísla popárujeme do dvojíc so súčtom n. Takto sme dosiahli najmenšie možné s, takže aj najväčšie možné k, ktoré je rovné $(n+1)/2$.
Ak je n párne, tak za predpokladu, že $s = n$, musí byť k rovné $(n+1)/2$. To však nie je celé číslo, teda $s = n$ nevyhovuje. Druhá najmenšia možnosť je $s = n+1$. Teraz čísla ľahko popárujeme do dvojíc so súčtom $n+1$ a dostaneme $k = n/2$, čo je hľadané maximum.

Iné riešenie

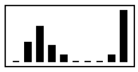
Dalo sa postupovať aj priamo, maximalizovaním k. Ak by existovali 2 skupiny, ktoré obsahujú iba 1 číslo, tak tieto skupiny majú zjavne rôzny súčet. Preto je takáto skupina nanajvýš jedna a zvyšné majú aspoň 2 čísla. Počet skupín je teda nanajvýš $(n-1)/2 + 1 = (n+1)/2$, pričom pre nepárne n je toto číslo celé a pre párne je najbližšie nie väčšie celé číslo rovné $n/2$. To, že tieto hodnoty vieme dosiahnuť, ľahko overíme ako v prvom riešení.

Komentár

Všetci ste prišli k správnemu výsledku, občas ste však nezvládli ukázať, že na viac skupín to naozaj nejde. Najčastejšie vás potrápili párne čísla, kde ste nedostatočne vysvetlili, že čísla nemôžeme rozdeliť lepšie ako do dvojíc.

2. Opravovali: **Timka Szöllősová, Michal Masrna**

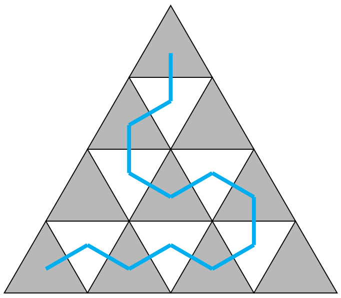
Počet riešení: 42



Majme rovnostranný trojuholník. Každá jeho strana je rozdelená na k rovnakých častí pomocou $k-1$ bodov. Týmito bodmi veďme rovnobežky so zvyšnými dvoma stranami trojuholníka. Takto vznikne trojuholníková sieť zložená z k^2 menších trojuholníkových políčok. Nazvime reťaz takú sekvenciu políčok, že každé políčko je v nej zahrnuté maximálne raz a po sebe nasledujúce políčka majú spoločnú stranu. Aká je najdlhšia možná reťaz?

Riešenie

V úlohách, v ktorých sa vyskytuje nejaká tabuľka, sa častokrát v riešení využíva jej ofarbenie. Tak to bude aj v tomto prípade – najintuitívnejšie ofarbenie je dať trojuholníčky smerujúce nahor jednou farbou a nadol druhou. Keď tak urobíme, môžeme si všimnúť, že každé dve po sebe idúce políčka reťaze musia mať rozdielnu farbu. Z toho vyplýva, že v reťazi môže byť políčok jednej farby najviac o jedno viac ako políčok druhej.
Pozrime sa teraz, koľko trojuholníčkov máme ktorej farby. Všetky sivé trojuholníčky okrem tých, ktoré majú základňu na základni veľkého trojuholníka, majú svoj pár – biely trojuholníček hneď pod sebou. Nuž a keďže na základni veľkého trojuholníka je presne k sivých trojuholníčkov, tak sivých trojuholníčkov je celkovo o k viac. Avšak v reťazi môže byť len o jeden sivý trojuholníček viac. To znamená, že aspoň $k-1$ trojuholníčkov nevieme zapojiť do reťaze.



Na záver ešte treba ukázať, že skutočne existuje taká reťaz, ktorá obsahuje presne $k^2-(k-1)$ trojuholníčkov. Táto reťaz vznikne tak, že v každom riadku okrem horného vynechá jeden sivý trojuholníček, ako vidíme na obrázku. Najdlhšia možná reťaz má teda k^2-k+1 políčok.

Komentár

Jediné iné, deväťbodové a veľmi originálne riešenie mal Dušan Oberta, ktorému by sme chceli aspoň takto zabezpečiť nehynúcu slávu v Strome. :)
Ostatní, ktorí ste úlohu vyriešili, ste ju vyriešili obdobnou úvahou o ofarbení siete. Táto metóda patrí k veľmi obľúbeným, čo sa týka kombinatorických úloh, preto si ju poriadne zapamätajte. Tí, ktorí ste za úlohu mali menej bodov, ste sa ju väčšinou snažili vyriešiť akousi indukciou. Problémom pri tejto úlohe je však fakt, že optimálna trasa pre $k-1$ nemusí byť súčasťou optimálnej trasy pre k.

3. Opravovali: **Žanetka Semanišinová, Maťo Gbúr**

Počet riešení: 42

Každé z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je rovné 1 alebo -1 a platí

$$a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + a_3a_4a_5a_6 + \cdots + a_{n-1}a_na_1a_2 + a_na_1a_2a_3 = 0.$$

Dokážte, že n je deliteľné 4.

Riešenie

Zo zadania je súčet jednotlivých súčinov rovný nule. Každý zo súčinov $a_1a_2a_3a_4$ až $a_na_1a_2a_3$ nadobúda hodnotu -1 alebo 1. Súčiny začínajú postupne všetkými číslami od a_1 po a_n, takže ich je dohromady n. Ak by sme hodnotu všetkých a_i s hodnotou -1 zmenili na 1, mal by teda náš súčet hodnotu n. Aby sme sa k hodnote n dopracovali, môžeme postupne meniť jednotlivé čísla a_i s hodnotou -1 na 1 a sledovať, čo sa bude diať s celkovým súčtom. Pri zmene znamienka nejakého a_i sa zmení znamienko štyroch súčinov, v ktorých sa to a_i nachádza, a všetky ostatné sa nezmenia. Rozoberme si preto zmenu celkového súčtu pre všetky možné hodnoty týchto štyroch členov.
Ako môžeme z tabuľky vidieť, bez ohľadu na to, aké a_i zmeníme, nezmeníme zvyšok nášho súčtu po delení 4. Postupným menením znamienok jednotlivých a_i dosiahneme súčet n a zvyšok súčtu po delení 4 sa zachová. Keďže na začiatku dáva súčet po delení štyrmi zvyšok 0, bude dávať zvyšok 0 po delení štyrmi aj n. Tým sme dokázali, že n je deliteľné štyrmi.

Pred zmenou znamienka	Po zmene znamienka	Zmena súčtu
1, 1, 1, 1	−1, −1, −1, −1	−8
1, 1, 1, −1	1, −1, −1, −1	−4
1, 1, −1, −1	1, 1, −1, −1	0
1, −1, −1, −1	1, 1, 1, −1	+4
−1, −1, −1, −1	1, 1, 1, 1	+8

Iné riešenie

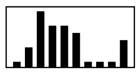
Podľa Mateja Urbana: Označme si jednotlivé sčítance ako b_1 až b_n (teda napríklad $b_2 = a_2a_3a_4a_5$). Potom súčin týchto sčítancov bude: $b_1 \cdot b_2 \cdots b_n = a_1^4 \cdot a_2^4 \cdots a_n^4$, keďže každé a_i sa nachádza v práve štyroch sčítancoch. Nakoľko a_i nadobúda len hodnoty ± 1, tak štvrté mocniny, a teda aj výsledný súčin, sa budú rovnať 1. Jednotlivé sčítance taktiež nadobúdajú len hodnoty ± 1, takže ak má byť ich súčin rovný jednej, musí sa párny počet sčítancov rovnať -1 (označme si tento počet $2k$). Zároveň ale chceme, aby súčet sčítancov bol 0, z čoho vyplýva, že počet záporných sčítancov je rovnaký ako počet kladných sčítancov. Celkový počet sčítancov je potom rovný $2k + 2k = 4k$, čím sme dokázali, že n je deliteľné štyrmi.

Komentár

Úloha sa dala riešiť viacerými spôsobmi a mnohé z nich boli poučné, do vzoráku sme vybrali dva najefektívnejšie. Mnohí z vás úlohu riešili tak, že ukázali, že počet členov rovných 1, respektíve -1 je párny, čo bol tiež dobrý spôsob riešenia. Kľúčové je vždy si rozmyslieť, na čom staviate dôkaz, že n je deliteľné 4 (či je to zvyšok súčtu po delení 4, parita počtu kladných sčítancov, alebo podobne) a sústrediť sa na ukázanie tejto konkrétnej veci. Napokon dôležité upozornenie. Predmetom úlohy bolo ukázať implikáciu – ak máme splnenú nejakú konkrétnu rovnosť s n číslami, potom je n deliteľné 4. Takže nás v skutočnosti vôbec nezaujíma, čo sa deje pre $n = 4$, alebo, či sa pre nejaké n deliteľné 4 rovnosť vôbec splniť dá, pretože to odpovedá opačnej implikácii. My len chceme vedieť, že jediná nádej na splnenie takejto rovnosti je v prípade, že 4 delí n a nič iné nastať nemôže.

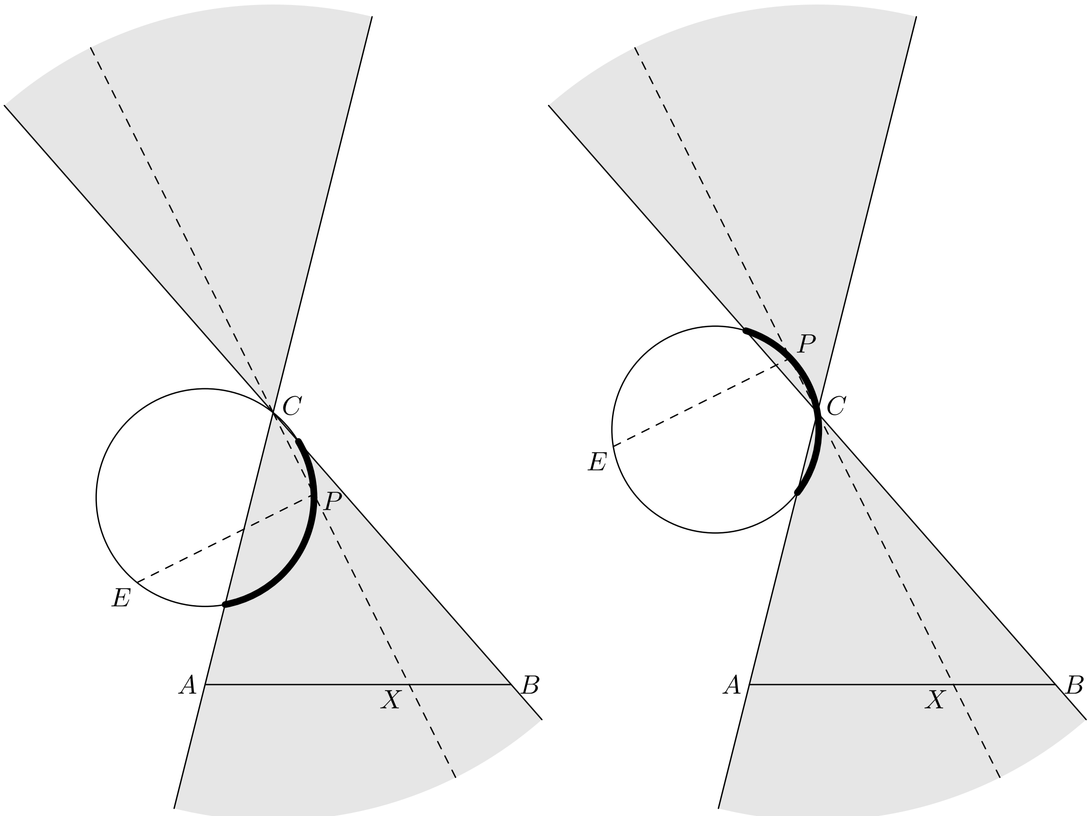
4.

Opravovali: **Martin Spišák, Mimi Hanus**
Počet riešení: 36



Je daný štvorsten $ABCD$. Po úsečke AB sa pohybuje bod X. Označme P pätu výšky spustenej z bodu D na priamku CX. Určte množinu bodov P, ktoré vyhovujú zadaniu.

Riešenie



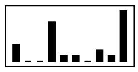
Pretože X je bod hrany AB a P je päta výšky spustenej z bodu D na priamku CX (ktorá samozrejme leží v rovine ABC), leží bod P v rovine ABC nezávisle od voľby X. Množina bodov P tým pádom bude podmnožinou roviny ABC.
Môžeme si všimnúť, že $DP \perp CX$ je ekvivalentné $EP \perp CX$, kde E je obraz vrcholu D v kolmej projekcii na rovinu ABC. Totiž keď DE je kolmá na rovinu ABC, je kolmá na všetky jej priamky vrátane CX a EP. Potom CX je buď kolmá na DP aj EP, alebo ani na jednu z nich, pretože na každú je kolmá práve vtedy, keď je kolmá na celú rovinu DEP. (V špeciálnom prípade, keď $E \equiv P$, nie je DEP rovinou, avšak vtedy je smerový vektor EP nulový, a teda kolmý na všetko. Táto situácia však nastane práve vtedy, keď obraz P bodu D v kolmej projekcii leží v rovine ABC priamo na CX, preto bude DP kolmé na CX.) Zvyšok úlohy preto budeme riešiť v rovine ABC, čo pomôže s geometrickou predstavou.
Pretože platí $EP \perp CX$ pre každú voľbu X, každý bod P leží na Tálesovej kružnici k s priemerom CE (degenerovaným prípadom je možnosť, že $E \equiv C$, keď platí $P \equiv C$ pre každú voľbu X), ktorej poloha nezávisí od X. Toto samozrejme platí aj v prípade, keď E leží na priamke CX, vtedy platí $E \equiv P$, a teda bod P samozrejme leží na k.
Priamka CX sa pretína s trojuholníkom ABC v bodoch C a X, takže vrátane bodu P leží v zjednotení uhla ACB a uhla k nemu vrcholového, čiže v sivej oblasti na obrázku (samozrejme, CX môže byť totožné s niektorou z hraničných priamok CA a CB). Uvedomme si, že keďže bod C leží na k, môže táto kružnica pretínať iba dva alebo tri zo štyroch uhlov vytýčených priamkami CA a CB a všetky vyhovujúce uhly majú spoločný bod C, cez ktorý prechádza k. (Toto platí, pretože dotyčnica t ku kružnici k v bode C rozdelí rovinu na dve polroviny, v každej z nich budú ležať časti minimálne dvoch a maximálne troch zo štyroch uhlov určených priamkami CA a CB a kružnica k musí byť celá obsiahnutá v jednej z týchto dvoch polrovín.) Z toho vyplýva, že prienik kružnice k a sivej oblasti je kružnicový oblúk alebo kružnicový oblúk a jeden osamotený bod (C). Keďže bod P musí ležať na kružnici k aj v sivej oblasti, bod P vždy leží v tomto prieniku.
Je dôležité poznamenať, že ako vyhovujúcu množinu bodov P nemôžeme vo všeobecnosti brať prienik spomínanej Tálesovej kružnice k so zjednotením uhla ACB a uhla k nemu vrcholového. Dôvodom je, že v spomínanom prieniku vždy leží bod C, ktorý však nie je vždy vyhovujúcim bodom P. Aby C bol vyhovujúcim bodom P pre nejaký bod $X \in AB$, musí byť pätou kolmice z bodu E na priamku CX pre nejaké X. To znamená, že dotyčnica t k našej Tálesovej kružnici k v bode C musí pretínať úsečku AB (čiže ležať v sivej oblasti), a to buď vo vnútornom bode (vtedy priamka t leží vnútri sivej časti), alebo v bode A (vtedy $t \equiv CA$), alebo v bode B (vtedy $t \equiv CB$). Naopak, ak t pretína úsečku AB, ich priesečník je vzorom X bodu C, a preto C patrí do množiny bodov P.
Nakoniec ukážeme, že každý bod kružnicového oblúka, ktorý vznikol prienikom kružnice k a sivej oblasti, je skutočne bodom P pre nejaký bod X na AB. Chceme teda ukázať, že každý bod oblúka má vzor v nejakom bode X na AB. To je však zrejmé, keďže celý oblúk leží v sivej časti. Potom pre ľubovoľnú voľbu bodu P na oblúku existuje práve jeden bod, v ktorom sa pretne úsečka AB a priamka CP. Keď označíme tento bod X, očividne $P \in CX$ a $EP \perp CX$.
Ak $C \equiv E$, množinou všetkých bodov P je $\{C\}$. Inak ak dotyčnica t ku kružnici k v bode C pretína úsečku AB (vo vnútornom alebo krajnom bode), množinou je prienik Tálesovej kružnice nad priemerom CE a zjednotenia uhla ACB a uhla k nemu vrcholového. Inak je množinou všetkých bodov P ten istý prienik bez bodu C. V každom prípade má hľadaná množina podobu kružnicového oblúka.

Komentár

Väčšina z vás správne zistila, že bod P leží na Tálesovej kružnici v rovine ABC. Často sa však opakovala chyba, keď ste uvažovali, že bod P leží na úsečke CX a nie na priamke, ako bolo v zadaní, a teda ste zabudli na to, že P môže ležať vnútri sivej časti aj mimo trojuholníka ABC, prípadne ste uvažovali, že leží iba v jednom zo sivých uhlov.
No rozhodne najťažším krokom celého riešenia bolo rozhodnúť, kedy bod C bude vyhovujúcim bodom P. Tento krok správne nezvládol skoro nikto, avšak zdalo sa nám, že viacerí z vás úlohu vyriešili takmer správne, no nezvládli správne vyhodnotiť, čo je výsledok, a správne ho spísať. Sme názoru, že riešiteľom, ktorí sa nedopracovali k správnemu výsledku, chýbala lepšia, presnejšia geometrická predstava, aj keď väčšina z vás prišla na kľúčové myšlienky – obmedzenie úlohy na rovinu, Tálesovu kružnicu. Často ste však zabudli uvažovať všetky možné polohy vrcholu D, prečo ste potom zabudli uvažovať obidva zo spomínanej dvojice uhlov a podobne.
Väčšina z vás však ešte urobila jednu podstatnú chybu, a to, že namiesto rovnosti dvoch množín dokazovala iba inklúziu jedným smerom. Môžeme polemizovať, že ukázať jednu inklúziu stačí pre body oblúka mimo bodu C (to by sme mohli považovať za pomerne zrejmé zo zadania), pre bod C je však nevyhnutné overiť, či skutočne je vyhovujúcim bodom, alebo nie. Nakoľko však úloha bola citlivá na precízne vyjadrovanie sa, bola náročná aj napriek relatívne nízkym požiadavkám na geometrické znalosti, preto nemusíte zúfať.
Vo vzoráku sme sa snažili čo najpresnejšie vysvetliť celý postup riešenia úlohy (správne riešenie mohlo byť aj podstatne kratšie), preto vám radíme prečítať si ho, nabudúce vám to už pôjde ľahko.

5. Opravovali: **Kristín Mišlanová, Robo Sabovčík**

Počet riešení: 24



Nájdite najväčšie číslo p také, že je možné na šachovnicu 2019×2019 umiestniť p pešiakov a $p + 2019$ veží tak, aby sa žiadne dve veže neohrozovali. (Dve veže sa ohrozujú, ak sú v tom istom riadku alebo stĺpci a všetky políčka medzi nimi sú prázdne).

Riešenie

Na šachovnici je $p + 2019$ veží. Každá z nich ohrozuje do 4 smerov, spolu máme preto $4 \cdot (p + 2019)$ ohrození. Vieme, že počet úsekov stien šachovnice je $4 \cdot 2019$ (šachovnica má 2019 políčok na každej zo 4 strán). Teda z $4 \cdot (p + 2019)$ celkových ohrození je $4 \cdot 2019$ zachytených stenami. Zvyšných $4p$ ohrození musí byť zachytených pešiakmi. Máme p pešiakov, takže každý z nich musí byť ohrozený zo všetkých 4 strán. Z toho ďalej vyplýva, že v okrajových riadkoch a stĺpcoch musia byť len veže (ak by tam bol pešiak, tak by aspoň z jednej strany nebol ohrozený).
Poďme sa pozrieť, koľko najviac veží a pešiakov vieme za týchto podmienok na šachovnicu uložiť. Vieme, že na okrajových riadkoch sú len veže, takže v prvom a poslednom riadku môže byť maximálne 1 veža. Do ďalších riadkov od kraja budeme veže a pešiakov umiestňovať nasledovne, kým to bude možné. Pešiakov umiestnime tak, aby susedili s vežami v predchádzajúcom riadku, teda tak, aby boli v rovnakom stĺpci (samozrejme okrem krajných stĺpcov, kde pešiakov dať nemôžeme, lebo by neboli z jedného smeru ohrození). Toto musíme urobiť, inak by z tohto smeru neboli pešiaci ohrození, čiže takto sme ich tam dali najviac, ako je prípustné. Následne na políčka susediace s pešiakmi v danom riadku umiestnime veže. Viac ich tam tak, aby sa neohrozovali, dať nevieme. V riadku $n + 1$ bude počet pešiakov nanajvýš rovnaký ako počet veží v riadku n a počet veží bude v každom riadku o 1 väčší ako počet pešiakov v tom riadku. Preto dokopy bude počet veží o 2019 väčší ako počet pešiakov.
Figúrok na šachovnicu dostaneme takýmto rozložením najviac, ak veže v okrajových riadkoch budú v ich stredoch, pretože potom bude stredný riadok vyplnený úplne celý. Na obrázku môžeme vidieť, ako by to vyzeralo pre šachovnicu 5×5, pre náš prípad by to vyzeralo analogicky.

		V		
	V	P	V	
V	P	V	P	V
	V	P	V	
		V		

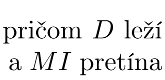
V tejto chvíli sme do každého riadku dali najviac figúrok, ako bolo možné. Takýmto vyplnením dostaneme štvorec veží s vrcholmi v stredoch strán šachovnice. Dĺžka strany tohto štvorca je 1010, preto je počet veží na šachovnici 1010^2. Keď od toho odčítame 2019, dostaneme 1009^2, čo je počet pešiakov.

Komentár

Najčastejšou a jedinou opakujúcou sa chybou bolo to, že ste zaplnili celú šachovnicu vežami a pešiakmi vo vopred určenom rozostavení a potom ste z neho len osekávali vrstvy alebo inak znižovali počet pešiakov a veží, kým ich rozdiel nebol 2019. To je však nesprávne, lebo to zahŕňa nevysvetlený predpoklad, že vaše pôvodné rozostavenie je nejakým spôsobom optimálne aj po odstránení niekoľkých figúrok, čo väčšina z vás nezvládla ukázať.

6. Opravovali: **Peťo Kovács, Viki Brezinová**

Počet riešení: 11



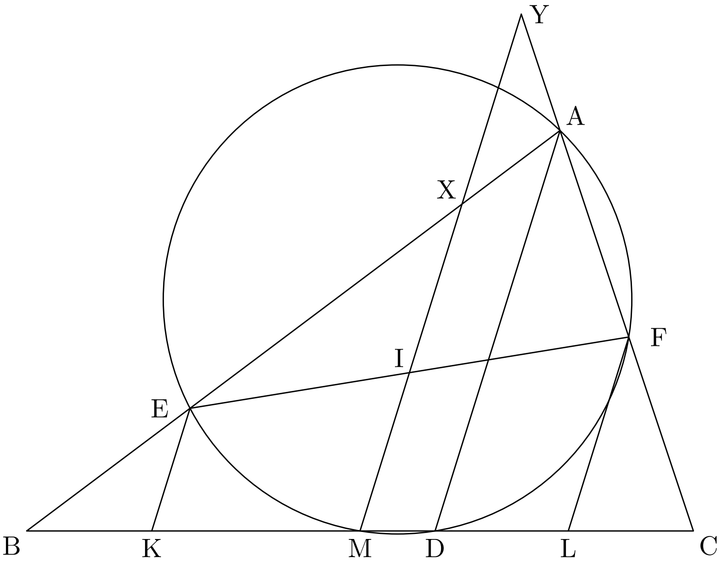
Nech ABC je ostrouhlý nerovnoramenný trojuholník, M je stred strany BC a AD je os uhla pri vrchole A, pričom D leží na strane BC. Kružnica opísaná trojuholníku ADM pretína AB v bode E a AC v bode F. Bod I je stred EF a MI pretína priamky AB v bode X a AC v bode Y. Dokážte, že AXY je rovnoramenný.

Riešenie

Podľa vety o osi vnútorného uhla (Angle bisector theorem) pomer dĺžok úsečiek, na ktoré rozdelí os uhla protiľahlú stranu je rovnaký ako pomer dĺžok zvyšných dvoch strán trojuholníka. Konkrétne pre trojuholník ABC s osou uhla AD to znamená, že $|BA| : |CA| = |BD| : |CD|$, čo si vieme upraviť na $|CD| : |CA| = |BD| : |BA|$.

Z mocnosti bodu B ku kružnici opísanej ADM $|BE| \cdot |BA| = |BM| \cdot |BD|$ a ďalej $|BE| : |BM| = |BD| : |BA|$. Z mocnosti bodu C k tej istej kružnici $|CF| \cdot |CA| = |CD| \cdot |CM|$, $|CF| : |CM| = |CD| : |CA|$. Už vieme, že $|CD| : |CA| = |BD| : |BA|$ (čo sú pravé strany predchádzajúcich dvoch rovníc). Odtiaľ $|BE| : |BM| = |CF| : |CM|$. M je stred strany BC, preto $|BM| = |CM|$ a následne $|BE| = |CF|$.

Na úsečku BC si doplníme body K a L tak, že EK aj FL sú rovnobežné s AD. Tým nám vznikli dve dvojice podobných trojuholníkov – $BKE \sim BDA$ a $CLF \sim CDA$ (ľahko si rozmyslíme, že tieto trojuholníky sú naozaj podobné, keďže majú rovnaké veľkosti uhlov). Z podobnosti trojuholníkov BKE a BDA vieme, že $|BK| : |BE| = |BD| : |BA|$. Podobne z podobnosti trojuholníkov CLF a CDA vieme, že $|CL| : |CF| = |CD| : |CA|$. Vyjadrime si z týchto pomerov $|BK|$ a $|CL|$:



$$|BK| = \frac{|BD||BE|}{|BA|} \quad |CL| = \frac{|CD||CF|}{|CA|}$$

Všimnime si, že pravé strany týchto vyjadrení sa rovnajú, lebo $|BE| = |CF|$ a $|CD| : |CA| = |BD| : |BA|$, odkiaľ tiež

$$\frac{|BD||BE|}{|BA|} = \frac{|CD||CF|}{|CA|}$$

Z toho vyplýva, že $|BK| = |CL|$ a $|KM| = |ML|$ (M je stred BC). Pozrime sa na štvoruholník $EKLF$ a úsečku MI v ňom. EK a FL sú rovnobežné, odkiaľ $EKFL$ je lichobežník a MI je jeho stredná priečka, lebo M je stred KL a I je stred EF. To znamená, že MI je rovnobežná s EK a FL, a preto je MI rovnobežná aj s AD (ktorá je tiež rovnobežná s EK a FL). BUNV nech X leží vnútri úsečky MY (prípad, keď Y leží vnútri MX je symetrický). Označme si veľkosť uhla BAD α. Potom $|\angle BAC| = 2\alpha$. Uhol XAY je susedný k uhlu BAC, takže $|\angle XAY| = 180° - 2\alpha$. Uhol BXM je súhlasný uhol k uhlu BAD (pretože MX a AD sú rovnobežky), $|\angle BXM| = \alpha$. Uhol AXY je vrcholový uhol k uhlu BXM, $|\angle AXY| = \alpha$. Uhol AYX teraz vieme dopočítať, keďže poznáme dva uhly v trojuholníku AXY – $|\angle AYX| = 180° - (180° - 2\alpha) - \alpha = \alpha$. Vidíme, že $|\angle AYX| = |\angle AXY|$, teda trojuholník AXY je rovnoramenný.

Komentár

Riešenia úlohy boli rôznorodé. Okrem riešenia uvedeného vo vzorovom riešení ste prišli aj na riešenia pomocou Švrčkovho bodu, špirálovej podobnosti alebo barycentrických súradníc. Niektorí riešitelia si správne všimli, že MI bude rovnobežné s AD, no nijako to nedokázali.

Konečné poradie letného semestra 44. ročníka

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
1.	Zdeněk Pezlar	S2	GJaroBR	54	9	9	9	9	-	9	108
2.	Václav Janáček	S3	GJaroBR	54	8	9	9	9	9	9	107
3. - 5.	Csaba Daniel Farkaš	S2	SBGČesBA	51	9	9	9	3	9	6	99
	Jiří Kalvoda	S3	GJaroBR	54	9	9	9	9	9	-	99
	Matej Urban	S3	GAMČABA	54	9	2	9	7	9	9	99
6. - 7.	Ela Vojtková	S2	GAMČABA	52	8	9	9	3	-	9	93
	Dušan Oberta	S4	GŠkolSN	54	9	9	9	3	9	-	93
8.	Paulína Dujavová	S2	GJARMPO	52	8	4	9	5	7	-	89
9.	Martin Kliment	S2	GPoštKE	54	8	2	9	4	9	-	88
10.	Erik Novák	S2	GPoštKE	54	8	1	9	2	9	-	84
11.	Michal Farnbauer	S3	GAMČABA	44	7	9	9	3	9	-	81
12.	Karin Eštoková	S1	GMRŠKE	50	5	3	9	3	-	1	80
13.	Samuel Vaško	S1	GJHN3BA	50	9	3	7	-	0	-	78
14.	Miriam Horváthová	S1	GŠtúrMI	49	7	2	7	-	3	1	76
15. - 16.	Samuel Banas	S3	LEAFABA	44	9	4	9	5	3	-	74
	Matúš Masrna	S2	GPoštKE	54	9	-	9	2	-	-	74
17.	Michal Urban	S1	GAMČABA	33	9	8	9	4	-	-	72
18. - 19.	Alex Gašparíková	S3	GAMČABA	36	8	9	6	2	9	-	70
	Peter Kochelka	S2	GJGTBB	49	9	3	9	-	-	-	70
20.	Ján Richnavský	S3	GPoštKE	36	9	9	9	5	-	-	68

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
21. - 22.	Oskar Hritz	S1	GPoštKE	36	7	1	9	4	-	-	66
	Martin Andričík	S3	GPoštKE	38	9	2	9	4	4	-	66
23. - 24.	Viktor Imrišek	S1	GAMČABA	45	7	-	-	-	3	-	62
	Sara Gašparová	S1	GAMČABA	26	9	9	9	-	0	-	62
25. - 26.	Timea Jakubócyová	S3	BGMHSuč	22	9	9	9	8	-	3	60
	Natália Čigašová	S1	GPoštKE	35	7	2	6	-	3	-	60
27.	Štefan Vašak	S1	GPoštKE	35	5	3	8	-	-	-	59
28. - 29.	Lujza Milotová	S3	GPoštKE	35	9	2	9	3	-	-	58
	Ľubomír Vargovčík	S1	GPoštKE	35	7	2	7	-	-	-	58
30.	Jakub Mičko	S2	GPoštKE	32	9	2	9	2	-	-	54
31.	Alex Blandón	S3	GPoštKE	27	7	8	9	2	-	-	53
32.	Timotej Šinkovic	S1	GAMČABA	23	9	-	9	-	-	2	52
33. - 34.	David Belobrad	S3	GAMČABA	18	7	9	9	2	3	3	51
	Michaela Rusnáková	S3	GAlejKE	14	8	9	9	6	3	2	51
35.	Lenka Hake	S3	GAlejKE	27	9	9	5	-	-	-	50
36. - 37.	Martin Kopčány	S1	GJChaBR	49	-	-	-	-	-	-	49
	Lucia Koľveková	S3	GPoštKE	30	8	1	5	5	0	-	49
38. - 40.	Adela Horváthová	Z9	ZDnepKE	27	6	2	2	1	3	-	47
	Jakub Farbula	S3	GAlejKE	24	9	1	9	4	-	-	47
	Klára Hricová	S3	GPoštKE	27	7	2	9	2	-	-	47
41.	Gabriela Genčiová	S3	GPoštKE	26	9	-	9	2	-	-	46
42. - 44.	Michal Vorobel	S3	GJARMPO	9	9	9	5	5	8	-	45
	Martin Kopčány	S1	GJChaBR	0	9	2	9	9	7	-	45
	Erik Tóth	S1	GJHN3BA	0	9	9	9	4	5	-	45
45.	Terézia Stanová	Z9	EGJAKKE	27	-	3	-	1	-	-	34
46. - 47.	Jakub Kliment	S3	GJGTBB	31	-	-	-	-	-	-	31
	Bianka Gurská	Z9	GAlejKE	28	-	1	-	1	-	-	31
48. - 51.	Martin Belluš	S1	GAMČABA	18	-	-	-	-	-	-	18
	Adam Garafa	S2	GPoštKE	18	-	-	-	-	-	-	18
	Viktória Krettová	Z8	GAMČABA	18	-	-	-	-	-	-	18
	Martin Nemjo	S3	GAlejKE	18	-	-	-	-	-	-	18
52. - 53.	Klára Pernicová	S3	GJaroBR	16	-	-	-	-	-	-	16
	Viliam Geffert	S1	GPoštKE	16	-	-	-	-	-	-	16
54.	Ladislav Antoži	Z9	GAlejKE	0	7	1	-	0	-	-	15
55.	Matej Kliment	S2	LEAFABA	13	-	-	-	-	-	-	13
56.	Jakub Kulka	S1	GMRŠKE	0	-	-	-	-	-	-	0

Názov: STROM – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 6 • Máj 2020 • Letný semester 44. ročníka (2019/2020)
Web: `seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Web: `zdruzenie.strom.sk`
E-mail: `info@strom.sk`

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM ĽUDSKÉ ZDROJE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje

www.minedu.sk www.employment.gov.sk/sk/esf/ www.itakademia.sk