STROM
Korešpondenčný matematický seminár

Ahoj!

Je tu ďalší časopis STROMu, ktorý prináša vzorové riešenia druhej série. Okrem toho, že je posledný v tomto semestri, je výnimočný aj tým, že s ním prichádzajú aj pozvánky pre tých najlepších z vás. Tí sa môžu tešiť na odmenu vo forme týždňového netradičného sústredenia v obklopení skvelými účastníkmi a vedúcimi. Ak sa Ti tam tentoraz nepodarilo dostať, nezúfaj. Pevne veríme, že nabudúce sa s Tebou uvidíme!

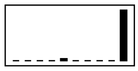
STROMáci

Tábor mladých matematikov

Čo by to boli za prázdniny bez TMMka? To veru nevieme. No sme si istí, že tento rok to určite zistiť nechceme! Preto aj tento rok chystáme pre budúcich siedmakov ZŠ až budúcich druhákov SŠ Tábor mladých matematikov, ktorý sa bude konať 23. - 30. augusta 2021 v ŠvP Detvianska Huta! Pýtaš sa, čo je to TMM? Ide o 8-dňový pobyt nabitý zaujímavým programom, na ktorom nesmie chýbať zábava, matematika a príjemná spoločnosť. Pozvánku s podrobnými informáciami a prihlášku nájdeš na našich webových stránkach. Nezabudni však, že kapacita je obmedzená, preto s prihlásením nečakaj na poslednú chvíľu. Tešíme sa na Teba!

1.

Opravovala: **Timka Szöllősová**
Počet riešení: 26



Máme dve kružnice k_1 a k_2, pričom k_2 je menšia a dotýka sa k_1 zvnútra v bode X. Stredy kružníc k_1, k_2 označme v poradí S_1, S_2. Bod P leží vnútri k_1 a neleží na k_2 ani na priamke S_1S_2. Body N_1 a F_1 sú priesečníkmi kružnice k_1 a priamky S_1P tak, že $|N_1P| < |F_1P|$. Analogicky, body N_2 a F_2 sú priesečníkmi kružnice k_2 a priamky S_2P, pričom $|N_2P| < |F_2P|$. Dokážte, že uhly N_1XN_2 a F_1XF_2 sú zhodné.

Riešenie

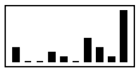
Uhly pri vrchole X nad tetivami - priemermi N_1F_1 a N_2F_2 sú pravé. Následne N_2XF_1 je rovný $|\sphericalangle N_1XF_1| - |\sphericalangle N_1XN_2| = 90° - |\sphericalangle N_1XN_2|$. Rovnako je rovný $|\sphericalangle N_2XF_2| - |\sphericalangle F_1XF_2| = 90° - |\sphericalangle F_1XF_2|$. Z toho plynie požadovaná rovnosť.
Poznámka na záver: Všimnime si, že poloha bodu P nemá vplyv na nič súvisiace s riešením.

Komentár

Väčšina z vás vyriešila úlohu vyššie uvedeným spôsobom, niektorí ste sa len viac rozpísali ako iní :)

2.

Opravovali: **Robo Sabovčík a Mimi Hanus**
Počet riešení: 26



Nech q je reálne číslo. Majme potom tri kladné celé čísla a, b, c také, že $q+a$, $q+b$, $q+c$ sú po sebe idúce členy geometrickej postupnosti s kvocientom iným ako 1. Ukážte, že q je racionálne.

Riešenie

Pre nejaký reálny kvocient k rôzny od 1 v geometrickej postupnosti $k(q+a) = q+b$ a $k(q+b) = q+c$. Vďaka tomu

$$\begin{aligned}(q+a)(q+c) &= (q+a)k(q+b),\\ (q+a)(q+c) &= (q+b)^2,\\ q^2+aq+cq+ac &= q^2+2bq+b^2,\\ q(a-2b+c) &= b^2-ac.\end{aligned}$$

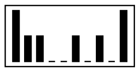
Ak $a-2b+c \neq 0$, q sa dá vyjadriť ako podiel $(b^2-ac)/(a-2b+c)$ dvoch celých čísel, z ktorých menovateľ nie je nula, a teda je racionálne. Ak $a-2b+c=0$, $c=2b-a$, z čoho po dosadení do poslednej rovnice dostaneme $q \cdot 0 = b^2 - a(2b-a) = (a-b)^2$, čiže $a=b$ a $q+a=q+b$. Aby kvocient nebol 1, musia byť tieto členy nulové, takže $q=-a$, čo je celé a tým pádom aj racionálne číslo.

Komentár

Všetky riešenia za kladný počet bodov okrem dvoch zvolili rovnaký prístup ako vzorové riešenie (vyjadrenie q pomocou a, b a c). Zapísať q ako podiel ste zvládli všetci, čo nás teší. Jediný výrazný problém bol, že ste buď vôbec nerozobrali prípad, keď $a-2b+c=0$, alebo ste ho rozobrali len veľmi povrchovo, čo však bohužiaľ nestačilo. Nabudúce sa po vyriešení úlohy zamyslite nad tým, či riešenie nemá ešte nejaké problematické prípady :).

3.

Opravovali: **Martin Masrna a Maťo Gbúr**
Počet riešení: 8



Dano a Peťo hrajú hru. Dano začína a striedajú sa v ťahoch. Jeden ťah pozostáva z napísania jednej cifry na tabuľu, pričom každá cifra môže byť napísaná buď na začiatok, alebo na koniec postupnosti cifier, ktoré už sú na tabuli. Dokážte, že Dano vie svojimi ťahmi zariadiť to, že číslo na tabuli (skladá sa zo všetkých cifier v tom poradí, ako sú napísané, v desiatkovej sústave) po žiadnom Peťovom ťahu nebude druhou mocninou prirodzeného čísla.

Riešenie

Na úvod si môžeme uvedomiť, že $x^2 \bmod 10 \in \{0,1,4,5,6,9\}$ pre všetky x (vieme si to ľahko overiť, ak každú cifru umocníme). Ak Dano vždy napíše na koniec cifru 2, 3, 7 alebo 8, Peťo môže vyhrať iba tak, že cifru napíše na koniec postupnosti.

Povedzme, že na tabuli je napísaná postupnosť cifier $\overline{x_1 \dots x_n}$. Ak by Dano napísal na koniec napr. cifru 2, a $\overline{x_1 \dots x_n 2k}$ by bol štvorec pre nejakú cifru k, prehral by. Keby toto platilo pre 2, 3, 7 aj 8, nemohol by žiadnu z týchto cifier pripísať na koniec postupnosti.

Čísla $\overline{x_1 \dots x_n 2k_1}$, $\overline{x_1 \dots x_n 3k_2}$, $\overline{x_1 \dots x_n 7k_3}$ a $\overline{x_1 \dots x_n 8k_4}$ ležia v intervale $\{x, \dots, x+69\}$ pre nejaké x. Najmenšie z nich môže byť $\overline{x_1 \dots x_n 20}$ a najväčšie $\overline{x_1 \dots x_n 89}$. Aby Dano nemohol na koniec napísať žiadnu z cifier 2, 3, 7, 8, museli by existovať 4 štvorce $s_1 < s_2 < s_3 < s_4$ také, že $s_4 - s_1 \leq 69$. Všimnime si, že $(10^2, 11^2, 12^2, 13^2) = (100, 121, 144, 169)$ túto podmienku spĺňajú tesne. Platí ale, že $(n+2)^2 - (n+1)^2 > (n+1)^2 - n^2$. Vzdialenosť medzi susednými štvorcami sa s rastúcim n zvyšuje. Teda pre každé číslo $x > 100$ platí, že v intervale $\{x, \dots, x+69\}$ ležia najviac 3 štvorce.

Preto, ak $\overline{x_1 \dots x_n} \geq 1$, tak $\overline{x_1 \dots x_n ck} > 100$ (využijeme $c \in \{2,3,7,8\}$). Keď je pred Danovým ťahom na tabuli aspoň jedna nenulová cifra,tak vie vždy vybrať cifru $c \in \{2,3,7,8\}$ tak, aby $\overline{x_1 \dots x_n ck}$ nebol štvorec pre žiadnu cifru k. Preto, ak Peťo napíše akúkoľvek cifru či už na začiatok, alebo na koniec postupnosti, tak po jeho ťahu na tabuli nebude napísaný štvorec.

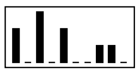
Jediný prípad, kedy toto neplatí, je úplne prvý ťah. Môžeme si ale ľahko overiť, že žiadne z čísel $\{70, \dots, 79\}$ nie je štvorec. Preto Dano v prvom ťahu napíše cifru 7. Potom vie už vždy vybrať cifru $c \in \{2,3,7,8\}$ tak, aby Peťo nemohol vyhrať.

Komentár

Napriek tomu, že sme dostali len 6 reálnych riešení, táto úloha nebola veľmi náročná a zakladala sa len na pedantnom rozobraní všetkých možných prípadov. Väčšine z vás sa to podarilo, avšak niektorí ste zabudli zvážiť to, že Peťo môže pred začiatok čísla napísať aj nulu. Je to síce triviálny prípad, no na dosiahnutie plného počtu bodov musíte rozobrať naozaj všetky možné ťahy.

4.

Opravovali: **Žanetka Semanišinová a Kubo Genči**
Počet riešení: 9



Na vedúcovskom sústredení sa stretlo 2020 vedúcich. V rámci tréningu na športy sa postupne stretli v spoločenskej všetky neprázdne podmnožiny vedúcich (každá inokedy). Vždy, keď sa podmnožina stretla, dohodla si svoj bojový pokrik, no vybrať si mohla iba z dvoch možností: „Vedúci, horia pukance!“ alebo „Nemám vodu!“. Jednotlivé podmnožiny si zvolili pokriky tak, aby platilo, že podmnožina, ktorá je zjednotením dvoch množín s rovnakým pokrikom, si tiež zvolila ten istý pokrik. Pre každé celé číslo n, $0 \leq n < 2^{2020}$, ukážte, že si mohli zvoliť pokriky tak, že práve n podmnožín má pokrik „Vedúci, horia pukance!“.

Riešenie

Označme pokrik „Vedúci, horia pukance!“ ako pokrik P a pokrik „Nemám vodu!“ ako pokrik V. Dokážeme všeobecnejšie tvrdenie, kde počet vedúcich bude $k \in \mathbb{N}$ a $0 \leq n < 2^k$. Z neho samozrejme vyplynie aj tvrdenie zo zadania. Dôkaz urobíme matematickou indukciou podľa k.

Nech $k = 0$. Potom možná hodnota pre $0 \leq n < 2^k = 1$ je len $n = 0$. Vtedy si každá podmnožina môže zvoliť pokrik V a všetko funguje. Predpokladajme teraz, že naše tvrdenie platí pre k a z toho dokážeme, že platí pre $k+1$. Označme vedúcich $v_1, \dots, v_{k+1}$ a uvažujme $0 \leq n < 2^{k+1}$. Rozlíšime 2 prípady.

Prípad $n < 2^k$:
Z indukčného predpokladu vieme, že môžeme vybrať n podmnožín množiny $\{v_1, \dots v_k\}$, ktorým priradíme pokrik P (a zvyšným priradíme pokrik V) tak, že budú spĺňať tvrdenie v prípade, keď by vedúcich bolo iba k. Presnejšie, pre každé dve neprázdne podmnožiny X a Y množiny $\{v_1, \dots v_k\}$ bude platiť, že ak majú rovnaký pokrik, tak aj $X \cup Y$ má tento pokrik.

Dokážeme, že táto voľba vyhovuje aj ak vezmeme do úvahy všetkých $k+1$ vedúcich. Uvažujme teda dve podmnožiny X a Y množiny $\{v_1, \dots v_{k+1}\}$ s rovnakým pokrikom. Ak ani jedna z nich neobsahuje v_{k+1}, tak vieme, že $X \cup Y$ má tiež rovnaký pokrik. V opačnom prípade aspoň jedna z nich obsahuje v_{k+1}, a teda v_{k+1} obsahuje aj $X \cup Y$. V tom prípade má X, Y aj $X \cup Y$ pokrik V.

Prípad $n \geq 2^k$:
Podľa predchádzajúceho prípadu vieme vybrať $m = 2^{k+1} - n < 2^k$ podmnožín, ktorým priradíme pokrik P (a zvyšným priradíme pokrik V), ktoré spĺňajú zadanie. Na tom, ktorý pokrik je ktorý, samozrejme nezáleží, takže rovnako vieme vybrať m podmnožín, ktorým priradíme pokrik V (a zvyšným pokrik P), ktoré spĺňajú zadanie. Množín s pokrikom P bude vtedy n, čo je presne to, čo sme chceli ukázať.

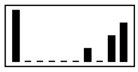
Ukázali sme, že ak tvrdenie platí pre číslo k, tak platí aj pre $k+1$, čím je dôkaz indukciou hotový.

Komentár

Do úlohy sa pustilo len veľmi málo z vás, čo je škoda, pretože to bola pekná a poučná úloha, aj keď nie jednoduchá. Okrem riešenia prezentovaného vo vzorovom riešení existuje ešte pekné riešenie, ktoré používa rozvoj n v dvojkovej sústave a ktoré je možno trochu intuitívnejšie. Spísať ho však formálne správne dá zabrať a tak sme sa rozhodli vás ním neodstrašiť vo vzoráku. Chceme však pochváliť všetkých, čo sa do úlohy pustili a prišli v nej aspoň na nejaké myšlienky.

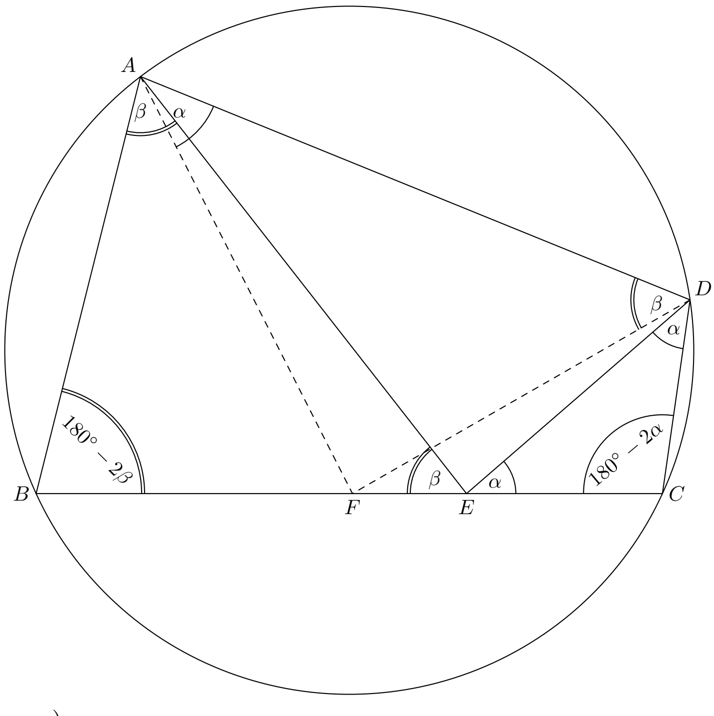
5.

Opravovali: **Kristín Mišlanová a Peťo Kovács**
Počet riešení: 10



Nech $ABCD$ je tetivový štvoruholník taký, že $|AB| + |CD| = |BC|$. Ukážte, že osi uhlov DAB a CDA sa pretínajú na úsečke BC.

Riešenie



Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $|AB| \geq |CD|$, v opačnom prípade funguje dôkaz symetricky. Keďže platí $|AB| + |CD| = |BC|$, tak na strane BC vyznačme bod E taký, že $|BE| = |AB|$ a $|EC| = |CD|$. Potom trojuholník CDE je rovnoramenný a platí $|\sphericalangle CDE| = |\sphericalangle CED| = \alpha$, $|\sphericalangle DCE| = 180° - 2\alpha$. Analogicky v trojuholníku ABE platí $|\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle AEB| = \beta$, $|\sphericalangle ABE| = 180° - 2\beta$. Štvoruholník $ABCD$ je tetivový, preto má súčty protiľahlých uhlov rovné 180° a dostávame $|\sphericalangle CDA| = 180° - |\sphericalangle ABC| = 180° - (180° - 2\beta) = 2\beta$. Rovnako dostaneme aj to, že $|\sphericalangle BAD| = 2\alpha$.

Teraz označme ako F priesečník strany BC s osou uhla CDA. Z toho, že $|\sphericalangle CDA| = 2\beta$ a DF je os uhla, dostávame $|\sphericalangle CDF| = |\sphericalangle FDA| = \beta$. Nad úsečkou AF máme dva rovnaké uhly FDA a FEA rovné β. Keď opíšeme trojuholníku FDA kružnicu, tak na nej musí ležať aj bod E, lebo uhol FEA má rovnakú veľkosť ako FDA (sú to obvodové uhly nad AF). Preto body A, F, E a D ležia na kružnici a tvoria tetivový štvoruholník. Vieme, že $|\sphericalangle FED| = 180° - |\sphericalangle DEC| = 180° - \alpha$. Z vlastností tetivových štvoruholníkov následne $|\sphericalangle FAD| = 180° - |\sphericalangle FED| = 180° - (180° - \alpha) = \alpha$.

Teraz si stačí uvedomiť, že sme postupne ukázali $|\sphericalangle BAD| = 2\alpha$ a $|\sphericalangle FAD| = \alpha$. Z toho priamo plynie, že AF je osou uhla BAD, a teda dané osi sa pretínajú v bode F, ktorý leží na úsečke BC.

Na záver ešte nesmieme zabudnúť, že by mohol nastať prípad, kedy by nami zvolené body E a F splynuli. Potom ale $\alpha = |\sphericalangle CDE| = |\sphericalangle CDF| = \beta$ a rovno vidíme, že platí $|\sphericalangle BAD| = 2\alpha$ a $|\sphericalangle BAE| = \beta = \alpha$, teda AF je os uhla BAD.

Komentár

Úloha nevyžadovala žiadne špeciálne znalosti, no napriek tomu bolo riešiteľov pomerne málo. Viac ako polovici sa úlohu podarilo vyriešiť správne. Body sme strhávali za nedostatočnú diskusiu o polohe bodov, prípadne za chýbajúci komentár k riešeniu.

6.

Opravovali: **Dano Onduš a Viki Brezinová**
Počet riešení: 3

Uvažujme postupnosti z čísel $1, \dots, n$, ktoré neobsahujú podpostupnosť a, b, a, b (nie nutne za sebou) pre žiadne rôzne a a b, ani dve rovnaké čísla za sebou, a v ktorých najľavejšie výskyty čísel tvoria rastúcu postupnosť. Z nich vyberme také, ktoré obsahujú každé číslo aspoň raz a majú dĺžku $2n-1$, čo je zároveň maximálna dĺžka, akú tieto postupnosti môžu nadobudnúť (to ukazovať nemusíte). Napr. pre $n = 3$ máme postupnosti 12321 a 12131. Ukážte, že ich počet je C_{n-1}, kde $C_0 = 1$ a $C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \dots + C_{n-1}C_0$ pre $n \geq 1$.

Riešenie

Tvrdenie dokážeme indukciou. Pre $n = 1$, máme postupnosti dĺžky 1 zložené zo samých jednotiek. Takáto postupnosť je len jedna, preto platí, že ich počet je $C_0 = 1$.

Vo všeobecnom prípade predpokladajme, že tvrdenie platí pre 1, 2, ..., $n-1$. Zoberme si vyhovujúcu postupnosť P zloženú z čísel 1 až n. Každá takáto postupnosť nutne začína číslami 1 a 2 v tomto poradí. Vložme si oddeľovač pred prvú a za poslednú dvojku v tejto postupnosti. Čísla sa v postupnosti objavujú v poradí, takže môžeme predpokladať, že medzi oddeľovačmi sú čísla 2 až k (každé niekoľkokrát), kde $k \leq n$. Za druhým oddeľovačom sa žiadne z týchto čísel už nemôže objaviť, v opačnom prípade máme pre $2 < b \leq k$ podpostupnosť 2, b, 2, b. Tiež platí, že medzi oddeľovačmi sa nemôže vyskytovať číslo 1, inak by sme dostali podpostupnosť 1, 2, 1, 2.

Pozrime sa na zvyšok postupnosti za druhým oddeľovačom. Sú v ňom čísla $k+1$ až n. Zároveň však môžeme znova používať číslo 1, lebo nebolo medzi oddeľovačmi, takže s číslami 2 až k nedostaneme zakázanú podpostupnosť. Ak by hneď za druhým oddeľovačom bolo iné číslo ako 1, tak by sme celú postupnosť vedeli predĺžiť tým, že pred to číslo pridáme 1. Toto pridanie 1 hneď za druhý oddeľovač postupnosť nepokazí, lebo ak by pre nejaké $b > k$ vznikla podpostupnosť 1, b, 1, b, tak už tam musela byť aj predtým, kvôli číslu 1 na úplnom začiatku postupnosti.

Teraz platí, že medzi oddeľovačmi máme postupnosť P_1 z $(k-1)$ rôznych čísel. Zároveň vidíme, že okrem dĺžky musí spĺňať všetky podmienky zadania. To, že je zložená zo znakov 2 až k namiesto 1 až $k-1$, je zjavne nepodstatné. Rovnako za druhým oddeľovačom máme postupnosť P_2 z $n-k+1$ rôznych čísel, v ktorej najľavejšie výskyty týchto čísel tvoria rastúcu postupnosť, lebo sme pridali 1 hneď za druhý oddeľovač. Preto tiež nutne spĺňa podmienky zadania, okrem dĺžky. Pozrime sa na ich dĺžky. Postupnosť P_1 môže mať podľa zadania dĺžku maximálne $2k-3$, P_2 maximálne $2n-2k+1$, čo je dokopy $2n-2$. Keďže P je v tvare 1, P_1, P_2, a podľa zadania má dĺžku $2n-1$, tak P_1 aj P_2 musia dosahovať maximálnu dĺžku, čím spĺňajú všetky predpoklady zadania. Potom z indukčného predpokladu máme C_{k-2} možností na výber P_1 a C_{n-k} možností na výber P_2, čo nám dáva $C_{k-2}C_{n-k}$ možností na výber P. Nakoniec stačí už iba sčítať tieto možnosti pre všetky k od 2 po n, čím dostávame vzorec pre C_{n-1} zo zadania, ako sme chceli.

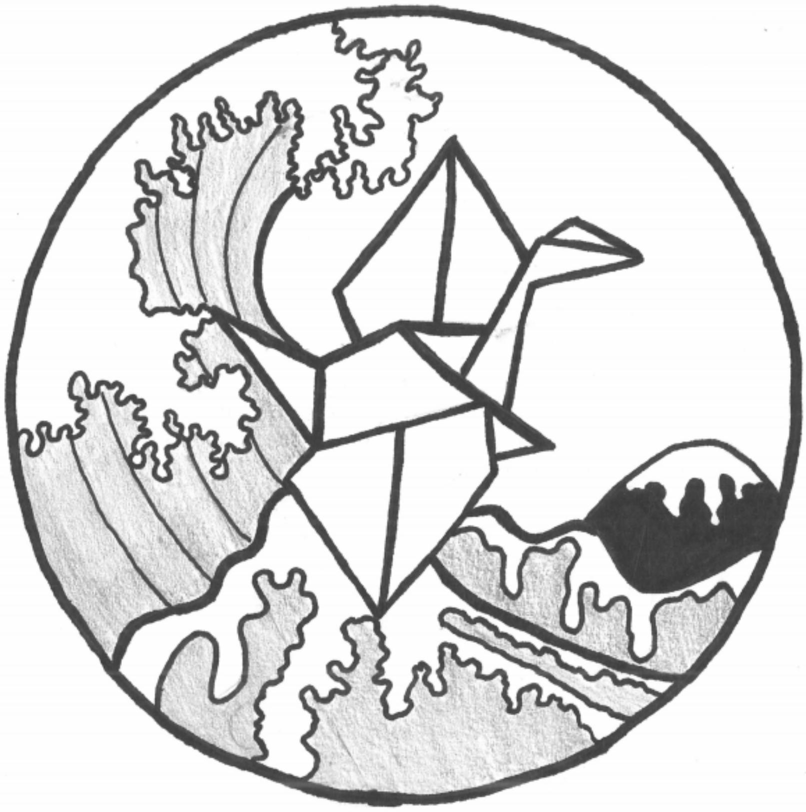
Komentár

Jediné riešenie, ktoré nám prišlo, bolo správne, čo nás veľmi teší, a nabudúce ich snáď bude viac.

Autori vzorových riešení: Erik Berta, Viktória Brezinová, Martin Albert Gbúr, Patrik Paľovčík, Róbert Sabovčík, Žaneta Semanišinová, Timea Szöllősová

Konečné poradie letného semestra 45. ročníka

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
1.	Lucia Chladná	Z9	GAMČABA	54	9	9	9	8	9	-	0	107
2.	Martin Kopčány	S2	GJChaBR	52	9	9	7	7	-	9	1	100
3.	Veronika Chovancová	S2	PiarGTN	54	9	8	9	2	9	-	0	93
4.	Karin Eštoková	S2	GMRŠKE	46	9	9	-	-	8	-	0	72
5.	Oskar Hritz	S2	GPoštKE	38	9	9	-	4	6	-	0	66
6.	Timea Jakubócyová	S4	BGMHSuč	36	9	9	-	-	9	-	0	63
7.	Sara Gašparová	S2	GAMČABA	38	9	9	-	-	-	-	0	56
8.	Matúš Masrna	S3	GPoštKE	35	9	9	-	-	-	-	0	53
9.	Katarína Farbulová	Z9	GAlejKE	25	9	3	-	-	-	-	-1	46
10.	Lenka Hake	S4	GAlejKE	44	-	-	-	-	-	-	0	44
11. - 12.	Maxima Bednarčíková	Z9	GAlejKE	22	9	3	-	-	-	-	-1	43
	Barbora Baltovičová	S1	GAlejKE	43	-	-	-	-	-	-	0	43
13.	Richard Gerboc	S2	GPoštKE	25	9	6	-	-	-	-	0	40
14.	Štefan Vašak	S2	GPoštKE	24	9	6	-	-	-	-	0	39
15.	Terézia Stanová	S1	EGJAKKE	19	9	-	-	-	-	-	0	37
16. - 17.	Ľubomír Vargovčík	S2	GPoštKE	21	9	6	-	-	-	-	0	36
	Martin Šmilňák	S1	GAlejKE	18	-	9	-	-	-	-	0	36
18.	Viliam Geffert	S2	GPoštKE	19	9	6	-	-	-	-	0	34
19.	Katarína Gersová	S1	GJHN3BA	24	4	0	1	-	-	-	0	33
20. - 21.	Lujza Milotová	S4	GPoštKE	14	9	7	0	0	0	0	0	30
	Branislav Ječim	S1	GŠkolSN	12	9	-	-	-	-	-	0	30
22. - 24.	Miriam Horváthová	S2	GŠtúrMI	19	9	-	-	-	-	-	0	28
	Peter Kochelka	S3	GJGTBB	28	-	-	-	-	-	-	0	28
	Ivan Kushpel	S3	GAMČABA	28	-	-	-	-	-	-	0	28
25. - 27.	David Belobrad	S4	GAMČABA	20	-	7	-	-	-	-	0	27
	Martin Andričík	S4	GPoštKE	27	-	-	-	-	-	-	0	27
	Ján Richnavský	S4	GPoštKE	18	9	0	0	0	0	0	0	27
28. - 29.	Natália Čigašová	S2	GPoštKE	26	-	-	-	-	-	-	0	26
	Michal Vorobel	S4	GJARMPO	0	9	9	-	-	8	-	0	26
30. - 34.	Erik Novák	S3	GPoštKE	25	-	-	-	-	-	-	0	25
	Martin Kliment	S3	GPoštKE	25	-	-	-	-	-	-	0	25
	Alex Gašparíková	S4	GAMČABA	18	-	7	-	-	-	-	0	25
	Jakub Kulka	S2	GMRŠKE	3	9	9	-	4	0	-	0	25
	Alex Blandón	S4	GPoštKE	0	9	9	5	2	-	-	0	25
35. - 37.	Michaela Rusnáková	S4	GAlejKE	24	-	-	-	-	-	-	0	24
	Jakub Farbula	S4	GAlejKE	15	9	0	-	-	-	-	-1	24
	Adela Horváthová	S1	GPoštKE	0	9	6	-	-	-	-	0	24
38.	Adriana Schmotzerová	S4	GPoštKE	6	9	4	-	2	-	-	0	21
39.	Bianka Gurská	S1	GPoštKE	20	-	-	-	-	-	-	0	20
40.	Vladimír Sklenár	S1	GTVanSL	9	-	-	2	-	0	-	0	13
41.	Natália Poliačiková	Z9	ZKro4KE	12	-	-	-	-	-	-	0	12
42.	Adam Džavoronok	S2	GPoštKE	8	-	-	-	-	-	-	0	8
43.	Norbert Micheľ	S4	GPoštKE	6	-	-	-	-	-	-	0	6



Názov: STROM – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 6 • Máj 2021 • Letný semester 45. ročníka (2020/2021)
Web: `seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`
Riešenia: Prijímame poštou, na webe a v prípade poruchy stránky na `riesenia.strom@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Web: `zdruzenie.strom.sk`
E-mail: `info@strom.sk`

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM ĽUDSKÉ ZDROJE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje

www.minedu.sk www.employment.gov.sk/sk/esf/ www.itakademia.sk