STROM
Korešpondenčný matematický seminár

Ahoj!

Je tu ďalší časopis STROMu, ktorý prináša vzorové riešenia druhej série. Okrem toho, že je posledný v tomto semestri, je výnimočný aj tým, že s ním prichádzajú aj pozvánky pre tých najlepších z vás. Tí sa môžu tešiť na odmenu vo forme týždňového netradičného sústredenia v obklopení skvelými účastníkmi a vedúcimi. Ak sa ti tam tentoraz nepodarilo dostať, nezúfaj. Pevne veríme, že nabudúce sa s tebou uvidíme!

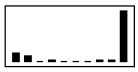
STROMáci

Tábor mladých matematikov

Ak premýšľaš, čo s časom počas ďalších letných prázdnin, a si prvák, máme pre teba dobré správy! Už vieme, kedy a kde sa bude konať TMM, teda Tábor mladých matematikov! V kalendári si rezervuj 29. júla až 5. augusta 2024, pretože práve vtedy sa ocitneme v Rekreačnom stredisku Zelený breh na najúžasnejšej akcii roka.

Nevieš, čo je TMM? Tábor mladých matematikov je ako sústredenie, avšak je o 2 dni dlhšie, takže o 2 dni lepšie! Viac informácií a samotnú pozvánku s prihlasovaním nájdeš na `https://seminar.strom.sk/tmm/`.

1.
Opravovali: **Erik „Rici“ Novák a Kristín Mišlanová**
Počet riešení: 49 Najkrajšie riešenia: **Bianka Gurská a Richard Vodička**



Rozhodnite, či existujú navzájom rôzne prvočísla p_1, p_2, … p_n také, že:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} = 1.$$

Riešenie

Predpokladajme, že existujú rôzne prvočísla p_1, p_2, … p_n, ktoré spĺňajú zadanie. Rovnicu si upravíme tak, že ju prenásobíme súčinom všetkých prvočísel $p_1 p_2 \dots p_n$:

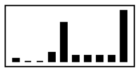
$$p_2 p_3 \dots p_n + p_1 p_3 \dots p_n + \cdots + p_1 p_2 \dots p_{n-1} = p_1 p_2 \dots p_n$$

Pravá strana rovnice je deliteľná p_1. To znamená, že aj ľavá strana rovnice musí byť deliteľná p_1. Všetky členy na ľavej strane rovnice okrem prvého obsahujú v súčine aj prvočíslo p_1, a teda ním sú deliteľné. Aby bol deliteľný aj celý súčet, tak potom aj prvý člen $p_2 p_3 \dots p_n$ musí byť deliteľný p_1.

Keďže $p_2 p_3 \dots p_n$ je ale súčin prvočísel rôznych od p_1, tak nie je tento výraz deliteľný p_1, čím dochádzame k sporu s predpokladom, že existujú navzájom rôzne prvočísla, pre ktoré rovnica platí.

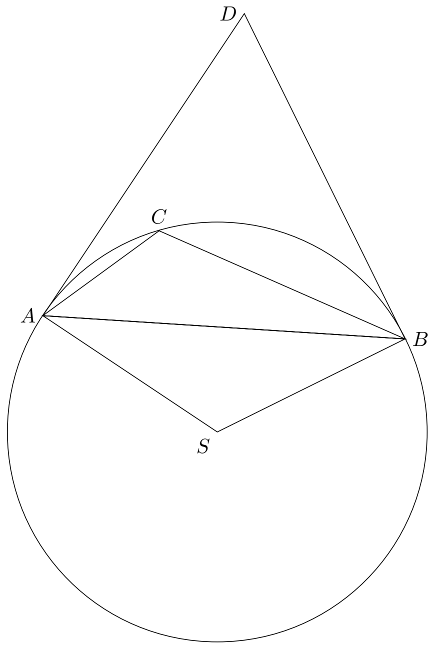
2. Opravovali: **Števo Vašak a Ľubo Vargovčík**

Počet riešení: 42 Najkrajšie riešenia: **Richard Vodička a Richard Prikler**



Majme trojuholník ABC so stranou AB dlhou 8 a uhlom oproti tejto strane veľkosti 120 stupňov. Označme p a q dotyčnice ku kružnici opísanej tomuto trojuholníku v bodoch A a B. Majme kružnicu k, ktorá sa dotýka naraz úsečky AB a priamok p a q. Označme D priesečník p a q a E bod dotyku p a k. Aká môže byť vzdialenosť DE? Nájdite všetky možnosti.

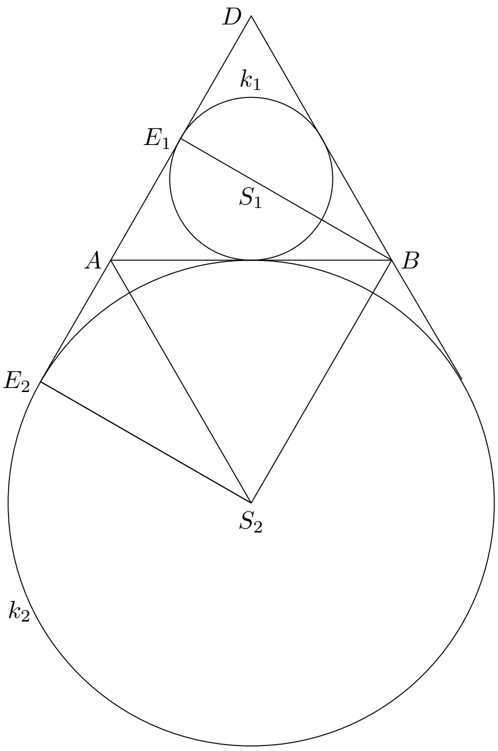
Riešenie



Nech S je stredom opísanej kružnice trojuholníku ABC. Uhol ACB je obvodový k tomu oblúku AB, ktorý neobsahuje bod C a stredový uhol tohto oblúka je preto $2 \cdot 120°$. Stredový uhol oblúku, na ktorom leží bod C, teda uhol ASB, je tým pádom $360° - 240° = 120°$. Priamky DB a DA sú dotyčnice ku kružnici, takže uhly SAD a SBD sú pravé. Uhol ADB má veľkosť 60°, čo vieme dorátať pomocou súčtu vnútorných uhlov štvoruholníka $BDAS$. Priesečník dotyčníc je rovnako vzdialený od oboch bodov dotyku s kružnicou, preto trojuholník ABD je rovnoramenný. Keďže uhol oproti jeho základni má 60°, je tento trojuholník rovnostranný a jeho strany majú dĺžku 8.

Máme dve možné polohy kružnice k. Môže ležať v polrovine ABD (k_1) alebo v opačnej polrovine (k_2).

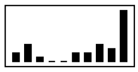
Pozrieme sa najprv na k_1. Stred S_1 kružnice k_1 leží na osi uhla ABD, keďže je to kružnica vpísaná trojuholníku ABD. Priamka S_1B je osou uhla ABD. V rovnostrannom trojuholníku os splýva s výškou, preto priesečník priamky S_1B a úsečky AD je bod E_1, ktorý je pätou výšky. Päta výšky v rovnostrannom trojuholníku je aj stredom strany AD, preto $DE_1 = 4$.



Teraz sa pozrime na kružnicu k_2 a bod E_2. Všimnime si, že AS_2 je os uhla E_2AB, keďže ide o pripísanú kružnicu trojuholníku ABD, a rovnako aj BS_2, preto uhly ABS_2 a BAS_2 majú veľkosť 60°, pretože sú polovicou susedných uhlov k uhlom DAB a ABD. Preto je trojuholník ABS_2 rovnostranný so stranami dĺžky 8. Pozrime sa teraz na štvoruholník $E_2S_2BE_1$ a všimnime si, že tri jeho uhly sú pravé, veľkosť uhla $E_1BS_2 = 30° + 60°$. Z toho vyplýva, že je obdĺžnikom. Keďže dĺžky strán BS_2 a E_1E_2 sú zhodné, tak E_1E_2 má dĺžku 8. To v súčte s dĺžkou E_1D dáva dĺžku úsečky DE_2 rovnú 12.

Takže dĺžky DE môžu byť buď 4, alebo 12, a iné možnosti nie sú, keďže sme sa pozreli na obe polroviny.

3. Opravovali: **Vilčo Geffert a Viki Brezinová**
Počet riešení: 30 Najkrajšie riešenie: **Michal Vodička**



V rade stojí $a+b$ misiek očíslovaných od 1 po $a+b$, kde a, b sú kladné celé čísla. V prvých a miskách je po jednom citróne a v posledných b miskách je po jednej limetke. V jednom ťahu vieme presunúť citrón z misky i do $i+1$ a limetku z j do $j-1$, ak rozdiel $|i-j|$ je párny. V jednej miske môže byť naraz aj viac citrusov. Chceme dostať postupom týchto krokov limetky do prvých b misiek a citróny do posledných a misiek (do každej jeden citrus). Pre aké a, b je to možné?

Riešenie

Bez ujmy na všeobecnosti uvažujme, že $a \geq b$. Keďže našou úlohou je premiestniť posledných b limetiek do prvých b misiek (a prvých a citrónov do posledných a misiek), tak v strede ostane $a-b$ misiek, v ktorých už citrón bude, a teda tieto citróny nebudeme musieť presúvať. Stačí nám teda vymeniť citróny v prvých b miskách s limetkami v posledných b miskách. (Ak by $a < b$, tak by nám stačilo vymeniť citróny v prvých a miskách s limetkami v posledných a miskách, zvyšok riešenia to nijako neovplyvňuje.)

Počas jedného ťahu môžeme presunúť len citrusy, ktoré sa nachádzajú v miskách s rovnakou paritou, keďže rozdiel $|i-j|$ musí byť párny. Vzdialenosť dvoch presúvaných citrusov sa zmenší alebo zväčší o 2, keďže oba posunieme o 1 v opačných smeroch a stále sa budú nachádzať v miskách s rovnakou paritou. Vďaka tomu si môžeme všimnúť, že ak máme na začiatku citrón a limetku v miskách s rovnakou paritou, tak ich po niekoľkých ťahoch vieme vymeniť. Ak by sme teda vedeli popárovať prvých b citrónov s poslednými b limetkami, pričom párovať môžeme len citrusy v miskách s rovnakou paritou, tak by sme ich určite vedeli vymeniť.

Úlohu si rozdeľme na niekoľko prípadov podľa parity a, b. V prvom prípade uvažujme, že a, b sú párne. Potom medzi prvými b číslami aj poslednými b číslami je $b/2$ párnych a $b/2$ nepárnych čísel. Preto citróny a limetky vieme v tomto prípade popárovať.

V druhom prípade uvažujme, že práve jedno z a, b je nepárne. Môžeme si všimnúť, že rozdiel medzi miskou 1 a miskou $a+b$ je párny (lebo $a+b$ je nepárne), teda tieto dva citrusy vieme vymeniť. Rovnako vieme vymeniť aj citrusy z misiek 2 a $a+b-1$, atď. Z toho vyplýva, že vieme vymeniť citrusy z misky k a $a+b-k$, kde $k \leq b$.

Posledný prípad nastane, ak a, b sú nepárne. Ukážeme, že v tomto prípade sa to nedá. Nech c_p udáva počet citrónov v párnych miskách na začiatku a l_p počet limetiek v párnych miskách na začiatku. Ak presunieme citrón i, tak sa počet citrónov v párnych miskách zmení (zväčší/zmenší) o 1. Rovnako sa v tom ťahu zmení aj počet limetiek v párnych miskách, pretože sme museli presúvať limetku z misky, ktorá mala rovnakú paritu ako i. Teda rozdiel medzi počtom citrónov v párnych miskách a počtom limetiek v párnych miskách bude počas všetkých ťahov konštantný, a to $c_p - l_p$. Na začiatku je počet citrónov v nepárnych miskách $c_p + 1$, keďže posledná miska s citrónom má číslo a, čo je nepárne, a prvá miska má číslo 1, čo je tiež nepárne. Počet limetiek v nepárnych miskách je na začiatku $l_p - 1$, keďže prvá miska s limetkou má číslo $a+1$, čo je párne, a posledná miska s limetkou má číslo $a+b$, čo je tiež párne.

Na konci by sme chceli, aby b limetiek bolo v prvých b miskách, čo by znamenalo, že limetiek na nepárnej pozícii je o 1 viac ako na párnej. To znamená, že počet limetiek na párnej pozícii na konci by mal byť $l_p - 1$.

Prvých b citrónov by sa malo presunúť do posledných b misiek, teda citrónov na párnej pozícii by malo byť o 1 viac ako na nepárnej. Inými slovami počet citrónov na párnej pozícii na konci by mal byť $c_p + 1$.

Rozdiel medzi počtom citrónov v párnych miskách a počtom limetiek v párnych miskách by na konci mal byť $c_p+1-(l_p-1) = c_p - l_p + 2$, teda o 2 väčší ako na začiatku. To je však spor s tým, že tento rozdiel je konštantný a jednotlivými ťahmi sa zmeniť nedá.

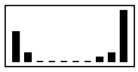
Vymeniť citróny a limetky podľa zadania bude možné práve vtedy, ak aspoň jedno z a, b je párne.

Komentár

Najčastejšou chybou vo vašich riešeniach bolo, že ste sa pri dokazovaní, prečo sa to pre a, b nepárne nedá, odvolávali na to, že citróny a limetky nevieme popárovať do dvojíc s rovnakou paritou, ktoré by sme následne po dvojiciach povymieňali. To však nie je dostatočný argument, pretože mohlo by sa stať, že by existovala nejaká iná správna postupnosť výmen, ktorá nepracuje s tým, že presúvame citrusy len po daných dvojiciach. Bolo potrebné dokázať, prečo sa to určite nedá, bez ohľadu na to, ako by sme ich vymieňali. Takýto typ úloh sa väčšinou dokazuje tým, že nájdeme nejakú vlastnosť, ktorá platí po každom kroku, a vedie k sporu s tým, čo chceme dosiahnuť na konci. Jednou z takých vlastností v tejto úlohe je rozdiel medzi počtom limetiek v párnych miskách a počtom citrónov v párnych miskách, ako môžete vidieť vo vzorovom riešení.

4.

Opravovali: **Matúš Masrna a Martin Masrna**
Počet riešení: 24 Najkrajšie riešenie: **Ondrej Králik**



Na chodbe sa rozbil kvetináč. Spýtali sme sa dvoch najbližších tried, kto rozbil kvetináč. Každý žiak obvinil práve jedného žiaka z tej druhej triedy. Dokážte, že vieme dať maslo na hlavu niektorým žiakom tak, že ak sa spýtame všetkých žiakov s maslom na hlave, povedia dokopy práve mená všetkých žiakov bez masla na hlave.

Riešenie

Úlohu si najprv preformulujeme do teórie grafov: majme bipartitný orientovaný graf (bipartitný graf je graf, v ktorom vieme rozdeliť vrcholy do dvoch skupín tak, že neexistuje hrana medzi vrcholmi v rovnakej skupine - v našom prípade skupiny reprezentujú triedy), pričom z každého vrcholu ide práve jedna hrana (reprezentujúca obvinenie). Dokážte, že vieme vrcholy ofarbiť červenou (má maslo na hlave) a modrou (nemá maslo na hlave) farbou tak, že:

- do každého modrého vrcholu ide hrana z aspoň jedného červeného vrcholu a že
- z červeného vrcholu môže ísť hrana iba do modrého vrcholu.

Všimnime si, že hrany idúce z modrých vrcholov sa nikde nespomínajú a riešenie nijak neovplyvňujú. Preto ak vrchol zafarbíme na modro, hranu idúcu z neho môžeme zmazať. Úlohu riešme indukčne.

Pre $n = 0$ podmienky platia. Pre $n = 1$ zafarbíme jediný vrchol na červeno. Pre $n \geq 2$ to rozdeľme na dva podprípady:

1. Ak existuje vrchol, do ktorého nevedie hrana, zafarbíme ho na červeno. Vrchol, do ktorého vedie hrana z tohto červeného vrcholu, zafarbíme na modro. Hranu z tohto modrého vrcholu zmažeme. Následne podľa indukčného predpokladu vieme ofarbiť zvyšných $n - 2$ vrcholov podľa podmienok.
2. Ak takýto vrchol neexistuje, znamená to, že do všetkých vrcholov ide hrana. Potom ofarbíme jednu partitu na červeno a druhú na modro. Z vlastností bipartitného grafu vyplýva, že z červených vrcholov idú hrany iba do modrých. Keďže do každého vrcholu ide hrana, tak do každého modrého vrcholu ide hrana z aspoň jedného červeného vrcholu, a ofarbenie tak spĺňa obe podmienky.

5. Opravovali: **Lujza Milotová a Jano Richnavský**
Počet riešení: 17 Najkrajšie riešenia: **Eduard Fedorčuk a Oliver Seman**

Predĺženie ťažnice z A v trojuholníku ABC pretne opísanú kružnicu v D rôznom od A, predĺženie ťažnice z B ju pretne v E rôznom od B. F a G delia strany a a b v tomto poradí v pomere $2:1$ tak, že kratšie úseky sú priľahlé k C. Dokážte, že uhly AGE a BFD sú zhodné.

Riešenie

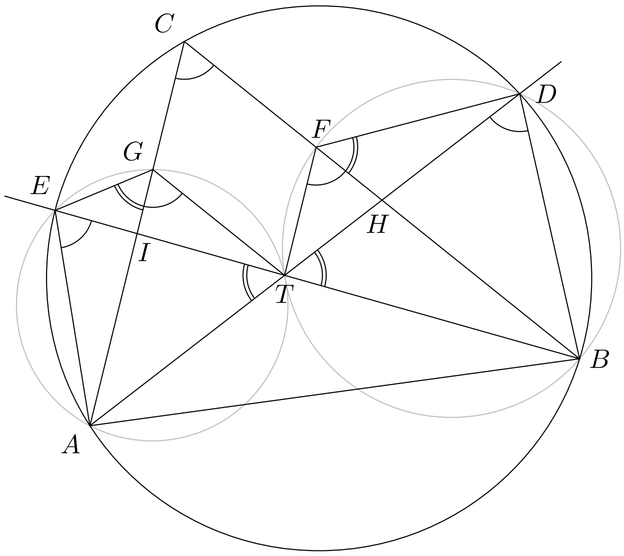
Z vlastností obvodových uhlov platí $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle AEB|$.

Označme H priesečník AD a BC a I priesečník BE a AC. Priesečník ťažníc označme T. Trojuholníky ATG a AHC sú podobné podľa *sus* (rovnaký uhol pri vrchole A a rovnaký pomer strán $AT : AH = AG : AC = 2:3$, ten vyplýva z vlastností rozdelenia ťažnice ťažiskom a zo zadania). Z tejto podobnosti vyplýva rovnobežnosť HC a TG. Z vlastností súhlasných uhlov potom $|\sphericalangle ACH| = |\sphericalangle AGT|$.

Analogicky sú podobné trojuholníky BTF a BIC, z čoho analogicky platí $|\sphericalangle BFT| = |\sphericalangle BCI|$.

Keďže $|\sphericalangle AGT| = |\sphericalangle ACH| = |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle AET|$, $ATGE$ je tetivový štvoruholník (AT je tetivou, nad ktorou majú obvodové uhly rovnakú veľkosť). Analogicky $|\sphericalangle BFT| = |\sphericalangle BCI| = |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle BDT|$, preto aj $BDFT$ je tetivový štvoruholník.

V tetivovom štvoruholníku $ATGE$ z vlastností obvodových uhlov vyplýva $|\sphericalangle AGE| = |\sphericalangle ATE|$, v tetivovom štvoruholníku $BDFT$ platí $|\sphericalangle BFD| = |\sphericalangle BTD|$. Keďže z vlastností vrcholových uhlov platí $|\sphericalangle ATE| = |\sphericalangle BTD|$, platí aj $|\sphericalangle AGE| = |\sphericalangle BFD|$, čo sme chceli dokázať.



6. Opravovali: **Mimi Hanus a Martin „Kopy“ Kopčány**

Počet riešení: 4 Najkrajšie riešenia: **Lucia Chladná a Dominik Rigasz**

Majme celé číslo c a polynóm $P(x)$ stupňa n, ktorého koeficienty sú celé čísla. Označme D najväčšie celé číslo, pre ktoré platí, že D delí $P(i)$ pre každé celé číslo i. Dokážte, že potom D je najväčší spoločný deliteľ čísel $P(c)$, $P(c+1)$, … $P(c+n)$.

Riešenie

Pre konštantný polynóm $P(x) = 0$ neexistuje najväčšie číslo deliace všetky jeho funkčné hodnoty v celých číslach. Pre všetky ostatné polynómy stupňa nula platí, že všetky funkčné hodnoty jedného z nich musia byť rovnaké celé čísla, teda ich najväčší spoločný deliteľ D je aj absolútnou hodnotou jedného z nich. Preto pre konštantné polynómy veta platí.

Pre ostatné polynómy túto úlohu vyriešime indukciou, kde v jednom indukčnom kroku vetu dokážeme pre všetky polynómy o 1 vyššieho stupňa ako v predchádzajúcom kroku.

Indukčný základ: Pre $n = 0$ sme vetu už overili.

Indukčný predpoklad: Veta platí pre všetky polynómy stupňa najviac i.

Indukčný krok: Označme $P(x)$ ľubovoľný polynóm stupňa $i+1$. Označme D' najväčší spoločný deliteľ čísel $P(c)$, $P(c+1)$, …, $P(c+i+1)$.

Zadefinujme si polynóm $Q(x) = P(x+1) - P(x)$. Keď si výraz $P(x+1) - P(x)$ rozpíšeme, tak koeficient pri x^{i+1} sa nám odčíta:

$$\begin{gathered}P(x+1) - P(x) = \\ (a_{i+1}(x+1)^{i+1} + \ldots + a_1(x+1) + a_0) - (a_{i+1}x^{i+1} + \ldots + a_1 x + a_0) = \\ (a_{i+1}x^{i+1} + \binom{i+1}{1} a_{i+1}x^i + a_i x^i + W(x)) - (a_{i+1}x^{i+1} + a_i x^i + V(x)) = \\ (i+1)a_{i+1}x^i + W(x) - V(x),\end{gathered}$$

pričom $V(x)$ a $W(x)$ sú polynómy stupňa menej ako i. Potom polynóm $Q(x)$ má stupeň i, lebo a_{i+1} je nenulové číslo a $i+1$ je prirodzené číslo.

Čísla $Q(c)$, $Q(c+1)$, …, $Q(c+i)$ sú všetky deliteľné číslom D'. Je to preto, že keď $D'|P(x)$ a $D'|P(x+1)$, tak $D'|P(x+1) - P(x) = Q(x)$, a všetky tieto funkčné hodnoty $Q(x)$ si vieme vyjadriť ako rozdiely čísel $P(c)$, $P(c+1)$, …, $P(c+i+1)$. Z indukčného predpokladu teda D' delí aj všetky ostatné hodnoty $Q(x)$ v celých číslach.

Z toho plynie, že napríklad číslo $P(c+i+2)$ je deliteľné číslom D'. Je to preto, že $D'|P(c+i+1)$ a $D'|Q(c+i+1)$, a odtiaľ $D'|(Q(c+i+1) + P(c+i+1) = P(c+i+2)$. Indukciou sa potom dá ukázať, že D' delí všetky funkčné hodnoty polynómu P s celočíselnými argumentmi väčšími ako $c+i+1$. Túto indukciu necháme ako cvičenie pre čitateľa.

Podobne vieme ukázať, že $P(c-1)$ je deliteľné číslom D', lebo sa dá vyjadriť ako rozdiel dvoch násobkov čísla D', a to $P(c)$ a $Q(c-1)$. Indukciou vieme ukázať, že aj pre všetky celé x menšie ako c platí, že $D'|P(x)$.

Z toho si vieme poskladať, že $D'|P(x)$ pre všetky celé čísla x. Z toho vyplýva, že D' delí D. Keďže D je najväčšie číslo deliace všetky funkčné hodnoty v celých číslach, tak D delí aj všetky funkčné hodnoty čísel $P(c)$, $P(c+1)$, …, $P(c+i+1)$, a teda D delí D'. Tým dostávame, že $D = D'$, to jest veta platí aj pre všetky polynómy stupňa $i+1$ a ukončujeme indukciu, ktorou sme dokázali zadané tvrdenie.

Iné riešenie

Pre každé $i \in \{c, \ldots, c+n\}$ definujme

$$L_i(x) = \prod_{j \in \{c,\ldots,c+n\} \setminus \{i\}} \frac{x-j}{i-j} = \left(\frac{x-c}{i-c} \cdot \frac{x-(c+1)}{i-(c+1)} \cdots \frac{x-(i-1)}{i-(i-1)}\right)\left(\frac{x-(i+1)}{i-(i+1)} \cdots \frac{x-(c+n)}{i-(c+n)}\right).$$

$L_i(i) = 1$, pretože po dosadení i za x sú všetky činitele súčinu rovné 1. Zároveň pre ľubovoľné $x \in \{c, \ldots, c+n\}$ rôzne od i $L_i(x) = 0$, lebo jeden z činiteľov má v čitateli 0. Teraz uvážme polynóm

$$L(x) = \sum_{i=c}^{c+n} P(i) L_i(x).$$

Z pozorovania o hodnotách polynómov $L_i(x)$ sa pre ľubovoľné $x \in \{c, \ldots, c+n\}$ jeden člen sumy (ten, v ktorom $i = x$) rovná $P(x)$ a ostatné členy sumy rovnajú 0. Odtiaľ plynie, že $L(x) = P(x)$ vo všetkých týchto x.

Keďže v definícii každého $L_i(x)$ je n činiteľov, $L_i(x)$ je polynóm stupňa n (pri x^n má koeficient 1). Potom $L(x)$ je tiež stupňa maximálne n, čiže $L(x)$ a $P(x)$ sú dva polynómy stupňa nanajvýš n rovnajúce sa v $n+1$ bodoch, takže nutne $L(x) = P(x)$ pre všetky reálne (nám by stačili celé) x.

Keď uvažujeme kombinačné čísla $\binom{r}{k}$ definované pre celé nezáporné k a reálne r štandardne ako $r \cdot (r-1) \cdots (r-k+1)/k!$,

$$\begin{aligned}
L_i(x) &= \left(\frac{x-c}{i-c} \cdot \frac{x-(c+1)}{i-(c+1)} \cdots \frac{x-(i-1)}{i-(i-1)}\right)\left(\frac{x-(i+1)}{i-(i+1)} \cdots \frac{x-(c+n-1)}{i-(c+n-1)} \cdot \frac{x-(c+n)}{i-(c+n)}\right) \\
&= \left(\frac{x-c}{i-c} \cdot \frac{x-c-1}{i-c-1} \cdots \frac{x-c-(i-c-1)}{1}\right)\left(\frac{-(c+n-x-(c+n-i-1))}{-1} \cdots \frac{-(c+n-x-1)}{-(c+n-i-1)} \cdot \frac{-(c+n-x)}{-(c+n-i)}\right) \\
&= \left(\frac{x-c}{i-c} \cdot \frac{x-c-1}{i-c-1} \cdots \frac{x-c-(i-c-1)}{1}\right)\left(\frac{c+n-x-(c+n-i-1)}{1} \cdots \frac{c+n-x-1}{c+n-i-1} \cdot \frac{c+n-x}{c+n-i}\right) \\
&= \binom{x-c}{i-c}\binom{c+n-x}{c+n-i}.
\end{aligned}$$

Pre celé x dostávame súčin kombinačných čísel, ktoré majú hore aj dole celé čísla, čo je vždy celé číslo. Zároveň

$$P(x) = \sum_{i=c}^{c+n} P(i) L_i(x).$$

Preto každé číslo, ktoré delí všetky $P(i)$ pre $i \in \{c, \ldots, c+n\}$, delí všetky členy sumy, a teda aj jej celkovú hodnotu $P(x)$ pre ľubovoľné celé x. Naopak zjavne každé číslo, ktoré delí všetky $P(x)$ pre x celé, delí aj $P(i)$ pre $i \in \{c, \ldots, c+n\}$. Teda najväčší spoločný deliteľ všetkých funkčných hodnôt polynómu $P(x)$ na celých číslach je rovný najväčšiemu spoločnému deliteľovi funkčných hodnôt na $\{c, \ldots, c+n\}$, čo bolo treba dokázať.

Konečné poradie zimného semestra 48. ročníka

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
1.	Lucia Chladná	S3	GAMČABA	54	9	9	9	9	9	9	0	108
2.	Oliver Seman	S2	GAlejKE	52	9	9	9	9	9	-	0	106
3.	Eva Krajčiová	S2	GAlejKE	53	1	9	9	9	9	-	0	99
4.	Matúš Pokorný	S2	GAMČABA	50	9	9	9	8	-	-	0	93
5.	Richard Vodička	S3	GAlejKE	47	9	9	9	9	9	-	0	92
6. - 7.	Marek Horváth	S3	GKonšPO	45	9	9	7	9	9	-	0	88
	Martin Šmilňák	S4	GAlejKE	49	9	4	9	8	9	-	0	88
8.	Michal Vodička	S1	GAlejKE	42	9	9	9	-	9	-	0	87
9.	Samuel Vargovčík	S4	ŠpMNDaG	40	9	9	9	9	-	9	0	85
10. - 12.	Alenka Bálintová	S1	BGMHSuč	44	9	4	8	9	-	-	0	83
	Ema Čudaiová	S4	GĽŠTN	49	9	9	7	0	9	-	0	83
	Michal Iľkovič	S3	GSMTŠPO	43	9	5	8	9	9	-	0	83
13.	Matúš Libák	S3	GAlejKE	40	9	9	9	9	-	-	0	76
14.	Tomáš Saksun	Z9	GAlejKE	42	9	4	1	9	-	-	0	74
15.	Eduard Fedorčuk	S4	EGJAKKE	27	9	-	9	9	9	-	0	63
16.	Richard Prikler	S1	GJARMPO	27	9	9	8	-	-	-	0	62
17.	Veronika Jakabová	S2	GAlejKE	31	9	7	5	-	4	-	0	60
18.	Ondrej Králik	S3	GAlejKE	24	9	9	7	9	1	-	0	59
19.	Veronika Vodičková	S3	GAlejKE	34	9	6	-	-	9	-	0	58
20.	Tomáš Sukeľ	S2	GAGLSHE	35	9	9	-	-	-	-	0	53
21.	Martina Osuská	S1	GJHN3BA	23	9	9	-	-	-	-	0	50
22.	Janka Urbánová	S1	GAlejKE	26	9	4	5	-	-	-	0	49
23.	Bianka Gurská	S4	GPoštKE	29	9	4	6	-	-	-	0	48
24.	Michal Ferdinandy	S1	GAlejKE	31	1	4	7	-	-	-	0	47
25. - 26.	Natália Poliačiková	S3	GPoštKE	24	9	4	9	-	-	-	0	46
	Branislav Ječim	S4	GŠkolSN	27	9	4	6	-	-	-	0	46
27.	Filip Findorák	S2	Šrobárka	27	9	9	-	-	-	-	0	45
28.	Juraj Kramár	S3	GAlejKE	24	9	9	-	-	-	-	0	42
29. - 30.	Rudolf Kusý	S2	GAMČABA	41	-	-	-	-	-	-	0	41
	Karin Sabová	S2	GAlejKE	25	9	7	-	-	-	-	0	41

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
31.	Martin Dudjak	S2	SMládPP	27	9	4	-	-	-	-	0	40
32. - 33.	Samuel Šandor	S2	GPoštKE	16	9	4	-	7	-	-	0	36
	Sarah Klopstock	S1	ŠpMNDaG	21	9	3	-	-	-	0	0	36
34. - 36.	Kalista Semancová	S3	GAGLSHE	15	9	8	2	0	1	-	0	35
	Nina Anna Betáková	S2	GAGLSHE	19	9	6	1	0	-	-	0	35
	Tomáš Kodaj	S2	GAMČABA	0	8	5	9	-	8	-	0	35
37.	Maxima Anna Alžbeta Bednarčíková	S3	GAlejKE	16	9	9	-	-	-	-	0	34
38. - 39.	Martin Vrba	S1	GPoštKE	27	1	4	-	-	-	-	0	33
	Matej Karpáč	S1	GAGLSHE	33	-	-	-	-	-	-	0	33
40.	Silvia Dallosová	S1	1sg	30	-	-	-	-	-	-	0	30
41.	Katarína Farbulová	S3	GPoštKE	16	9	4	-	-	-	-	0	29
42.	Alzbeta Klimentova	S4	GPoštKE	28	-	-	-	-	-	-	0	28
43.	Martin Mentel	S1	BGMHSuč	25	1	-	-	0	-	-	0	26
44.	Terézia Stanová	S4	EGJAKKE	16	-	8	-	-	-	-	0	24
45. - 46.	Lucia Kleščová	S3	GPoštKE	10	9	4	-	-	-	-	0	23
	Oskar Cacara	S2	GPoštKE	14	9	-	-	-	-	-	0	23
47.	Erik Jochman	S4	GAlejKE	21	0	-	-	-	-	-	0	21
48.	Peter Kovalický	S2	GAK9KBŠ	17	0	3	-	-	0	-	0	20
49.	Ondrej Tóth	S1	SPS KNM	15	0	-	0	1	2	-	0	19
50.	Adam Fedorjak	S2	Šrobárka	14	3	-	1	0	-	-	0	18
51.	Markéta Dlugošová	S1	GKukuPP	8	7	-	0	1	-	-	0	17
52.	Jana Kaťuchová	S2	Šrobárka	15	0	-	1	0	-	-	0	16
53.	Tomáš Lang	S1	SPŠTSNV	9	0	3	-	-	-	-	0	12
54. - 57.	Timon MIchael Valanský	S1	GPoštKE	9	-	-	-	-	-	-	0	9
	Nina Hudáková	Z9	GAlejKE	9	-	-	-	-	-	-	0	9
	Richard Suďa	S1	GVaršZA	9	0	0	-	0	-	-	0	9
	Dominik Rigasz	S3	GJHN3BA	0	-	-	-	-	-	9	0	9
58. - 59.	Daniel Ryan Takáč	Z9	GAlejKE	7	-	-	-	-	-	-	0	7
	Matej Bratko	S1	Šrobárka	7	-	-	-	-	-	-	0	7
60.	Matej Ľachký	S1	BGMHSuč	4	-	-	-	-	-	-	0	4

Názov: Strom – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 3 • December 2023 • Zimný semester 48. ročníka (2023/2024)
Web: `seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`
Riešenia: Prijímame odovzdaním na webe a v prípade poruchy stránky na adrese `riesenia.strom@strom.sk`.

Vydáva: Združenie Strom, Jesenná 5, 041 54 Košice
Web: `zdruzenie.strom.sk`
E-mail: `info@strom.sk`

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.