Košický Matboj

Košice, 6. 5. 2022

1. časť

Úloha 1.1: Existujú tri prirodzené čísla n väčšie ako 1, pre ktoré platí, že ak číslom n vydelíme čísla 37 a 47, dostaneme rovnaký zvyšok. Určte súčet týchto troch čísel.

Výsledok: 17

Riešenie: Našou úlohou je nájsť všetky čísla n (väčšie ako 1) také, že čísla 37 a 47 dávajú rovnaký zvyšok po delení číslom n. Ak dve čísla dávajú rovnaký zvyšok po delení jedným číslom (v našom prípade n), tak číslo n delí rozdiel tých dvoch čísel, pretože:

$$47 = n \cdot a + z$$

$$37 = n \cdot b + z$$

$$47 - 37 = n \cdot (a - b)$$

Preto n delí $47 - 37 = 10$. Takéto prirodzené n väčšie ako 1 máme práve 3. Konkrétne sú to 2, 5 a 10, teda ich súčet je $2 + 5 + 10 = 17$.

Úloha 1.2: Štyria kamaráti povedali nasledovné výroky:

- Matúš: „Dvaja z nás hovoria pravdu."
- Martin: „Robo aj Paťo klamú."
- Robo: „Paťo klame."
- Paťo: „Matúš aj Robo hovoria pravdu."

Napíšte mená všetkých kamarátov, ktorí hovorili pravdu.

Výsledok: Robo

Riešenie: Na začiatok predpokladajmne, že by Martin hovoril pravdu. Potom Robo aj Paťo musia klamať. Robo však vraví, že Paťo klame, čo je pravda. Preto **Martin klame**, a teda aspoň jeden z dvojice Robo a Paťo hovoria pravdu (obaja ju však hovoriť nemôžu, lebo ak by Robo vravel pravdu, tak potom podľa jeho výroku musí Paťo klamať a nemôže tiež hovoriť pravdu). Rozoberme teda 2 možnosti:

1. Paťo hovorí pravdu (a Robo klame), teda Matúš a Robo hovoria pravdu. To však nemôže byť pravda, lebo Robo musí klamať.
2. **Robo hovorí pravdu (a Paťo klame)**, Paťo teda klame (čo sedí), preto aspoň jeden z dvojice Matúš a Robo musia klamať. Keďže Robo hovorí pravdu, tak **Matúš musí klamať**. Overme si teraz jeho výrok. Pravdu hovorí len Robo, čo nie sú dvaja z nás. Táto možnosť vyhovuje.

Pravdu hovorí iba Robo.

Úloha 1.3: Dĺžky hrán kvádra tvoria tri po sebe idúce členy geometrickej postupnosti s koeficientom k (každý člen postupnosti vznikne z predchádzajúceho prenásobením číslom k). Dĺžky dvoch z hrán kvádra sú 5 a 8 centimetrov. Aký je najmenší možný objem kvádra?

Výsledok: 125

Riešenie: Označme si tretí rozmer r. Potom máme len tri možnosti, ako môžu byť členy postupnosti zoradené - (r, 5, 8), (5, r, 8) alebo (5, 8, r). Môžeme si všimnúť, že by sme mohli napísať aj ďalšie tri, ktoré by mali opačné poradie. To by však znamenalo len to, že k by malo prevrátenú hodnotu, ale r by bolo rovnaké pre obe poradia.

Keďže rozmery kvádra sú kladné čísla, k musí byť tiež kladné. To znamená, že postupnosť je monotónna, a teda r bude najmenšie v prvej možnosti zoradenia, pretože je v nej $r < 5$ pričom v ostatných $r > 5$.

Použitím najmenšieho r vznikne aj najmenší objem, lebo 5 a 8 sú nemenné. Preto uvažujme r z prvej možnosti.

Najskôr dorátajme k:

$$k \cdot 5 = 8$$

$$k = \frac{8}{5}$$

Z čoho vieme dorátať r:

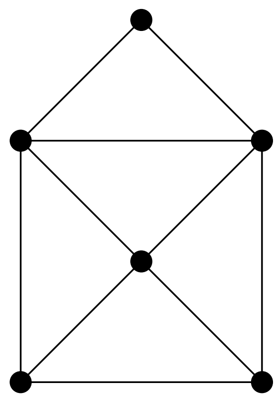
$$k \cdot r = \frac{8}{5} \cdot r = 5$$

$$r = 5 \cdot \frac{5}{8} = \frac{25}{8}$$

Ostáva dorátať ešte objem:

$$o = r \cdot 5 \cdot 8 = \frac{25}{8} \cdot 5 \cdot 8 = 125$$

Úloha 1.4: Koľkými spôsobmi vieme ofarbiť vrcholy domčeka dvoma farbami tak, aby žiaden trojuholník nemal všetky vrcholy jednej farby?



Výsledok: 8

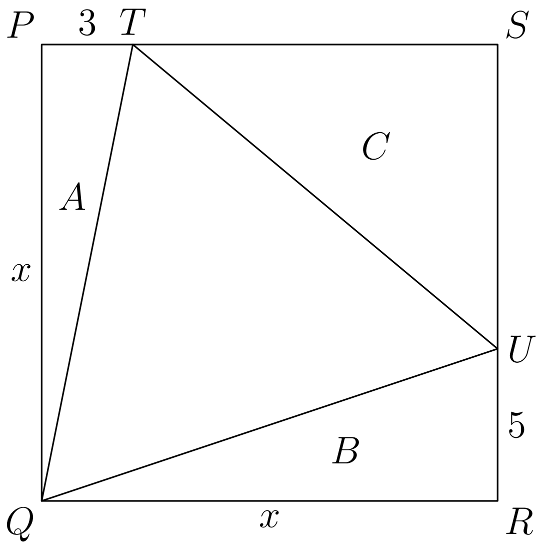
Riešenie: Pre jednoduchosť si trojuholníky rozdelíme na *telo* (spodných 5 vrcholov) a na *strechu* (vrchný trojuholník).

Všimnime si, že v tele sa nachádza 5 vrcholov, čiže aspoň 3 musia mať rovnakú farbu. Zároveň všetky trojice bodov, ktoré neležia v priamke, vytvoria trojuholník (medzi trojuholníky rátame aj tie, ktoré majú celú uhlopriečku ako svoju stranu). Preto, aby žiaden trojuholník nemal vrcholy tej istej farby, musia 3 vrcholy rovnakej farby ležať na jednej priamke a zvyšné 2 vrcholy musia byť vyfarbené druhou farbou.

Teraz máme 2 možnosti na polohu vrcholov na priamke - buď na jednej alebo na druhej uhlopriečke tela. Taktiež máme 2 možnosti na to, akou farbou budú vrcholy tejto uhlopriečky vyfarbené. To sú dokopy 4 možnosti na ofarbenie tela.

Všimnime si, že v každom prípade budú mať dva vrcholy, ktoré zdieľa telo a strecha, navzájom rôznu farbu. Z toho vyplýva, že na farbe posledného vrcholu na streche nezáleží, máme preň 2 možnosti. Dokopy máme $4 \times 2 = 8$ možností.

Úloha 1.5: Na obrázku je štvorec $PQRS$ a na jeho stranách sú vyznačené body T a U. Strany štvorca a úsečky QT, QU a TU oddeľujú tri plochy s obsahmi A, B a C. Vieme, že pre vyznačené obsahy plôch platí $A + B = C$. Zistite dĺžku strany x štvorca $PQRS$.



Výsledok: 15

Riešenie: Ako prvé si vyjadríme pomocou dĺžky x veľkosť obsahov A a B, a následne C. Vieme, že všetky tri spomínané plochy sú obsahy pravouhlých trojuholníkov (pretože $PQRS$ je štvorec). Preto stačí vynásobiť dĺžky odvesien týchto trojuholníkov a súčin vydeliť dvoma.

$$A = \frac{3x}{2}$$

$$B = \frac{5x}{2}$$

$$C = A + B = \frac{8x}{2} = 4x$$

Vyjadríme si C pomocou $|TS|$ a $|SU|$. Keďže strana štvorca je x, tieto dĺžky sú postupne $x - 3$ a $x - 5$. Teda dostávame:

$$C = \frac{(x-3)(x-5)}{2} = \frac{x^2 - 8x + 15}{2}$$

Keď to spojíme s predošlou úvahou, dostávame:

$$4x = \frac{x^2 - 8x + 15}{2}$$

$$8x = x^2 - 8x + 15$$

$$x^2 - 16x + 15 = 0$$

$$(x - 1)(x - 15) = 0$$

Z toho dostávame korene $x = 1$ a $x = 15$. Vidíme, že strana štvorca nemôže byť 1, pretože úsečky TS a SU by mali záporné dĺžky, preto $x = 15$.

Úloha 1.6: Nájdite najmenšie kladné celé číslo n také, že n aj $n+1$ majú ciferný súčet deliteľný 14.

Výsledok: 5 899 999 999 999

Riešenie: Najprv si rozmyslíme, ako sa môže líšiť ciferný súčet dvoch po sebe idúcich čísel. Ak číslo n nekončí na 9, potom má $n+1$ o 1 vyšší ciferný súčet. Ak n končí jednou cifrou 9, tak bude rozdiel ciferného súčtu $n+1$ a n rovný $-9+1=-8$. Vo všeobecnosti, ak n končí k ciframi 9, rozdiel ciferných súčtov $n+1$ a n bude $-9k+1$, pretože pri pripočítaní 1 sa k cifier 9 zmení na 0 a pred touto postupnosťou cifier 9 sa pripočíta alebo pribudne číslo 1. Keďže oba ciferné súčty majú byť deliteľné 14, musí byť deliteľný 14 aj tento rozdiel. Zároveň hľadáme čo najmenšie n preto chceme, aby malo čo najnižší počet cifier, teda aby k bolo čo najmenšie.

Najmenšie k, pre ktoré 14 delí $-9k+1$, je $k=11$. Ak n končí 11 ciframi 9, tak ostatné cifry n musia mať súčet, ktorý dáva zvyšok 13 po delení 14 (pretože $9 \cdot 11 = 99$ dáva zvyšok 1 a celý ciferný súčet má byť deliteľný 14). To sa nám podarí pridaním najmenej 2 cifier, pričom chceme, aby n začínalo čo najmenšou cifrou. Dvojica 4 a 9 nevyhovuje kvôli tomu, že by zmenila hodnotu k. Najmenšie vyhovujúce n preto dosiahneme voľbou prvých dvoch cifier rovných 5 a 8. Máme teda $n = 5899999999999$ (11 cifier 9 na konci) a zrejme vyššou hodnotou k menšie vyhovujúce n nezískame, takže sme našli riešenie.

Úloha 1.7: Majme postupnosť celých čísel $\{a_k\}$, kde $a_1 = 1$ a $a_{n+m} = a_n + a_m + nm$ pre všetky kladné celé čísla m a n. Aká je hodnota a_{2022}?

Výsledok: 2 045 253

Riešenie: Najprv si uvedomíme, že vďaka tomu, ako je postupnosť tvorená, platí $a_k = a_{k-1} + a_1 + 1 \cdot (k-1)$. Vieme, že $a_1 = 1$, preto si daný výraz prepíšeme na $a_k = a_{k-1} + 1 + (k-1)$, z čoho vyplýva, že $a_k = a_{k-1} + k$. Takýmto spôsobom si vyjadríme aj $a_{k-1} = a_{k-2} + (k-1)$. Ak by sme teraz zobrali $k = 2022$, tak takýmto postupným rozpisovaním dostaneme $a_{2022} = a_1 + (k-2020) + (k-2019) + \cdots + (k-1) + k$, kde po dosadení $k = 2022$ a $a_1 = 1$ dostaneme $a_{2022} = 1 + 2 + \cdots + 2021 + 2022$. Na sčítanie tohto výrazu použijeme súčtový vzorec, ktorý nám vraví, že súčet prvých n prirodzených čísel je rovný $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$. Preto, $a_{2022} = 1 + 2 + \cdots + 2021 + 2022 = 2\ 045\ 253$.

Úloha 1.8: V nádobe sú 2 žlté, 4 červené a 6 modrých guľôčok. Po jednej ich vyťahujeme a zahadzujeme. Aká je pravdepodobnosť, že vytiahneme obe žlté guľôčky predtým, ako vytiahneme čo i len jednu červenú?

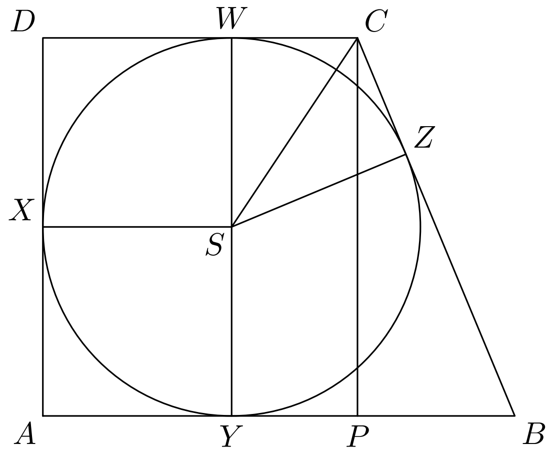
Výsledok: $\frac{1}{15}$

Riešenie: Na úvod si môžeme uvedomiť, že vytiahnutie modrej guľôčky nijako neovplyvní splnenie našej podmienky. Modré guľôčky preto môžeme ignorovať a predpokladať, že v nádobe sú iba 2 žlté a 4 červené guľôčky. Potom je už len jediná možnosť, ako vieme vytiahnuť obe žlté guľôčky skôr ako prvú červenú. Pri prvom vytiahnutí máme 2 zo 6 možností na vybratie žltej guľôčky a pri druhom už len 1 z 5 možností. Výsledná pravdepodobnosť teda bude $\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$.

Úloha 1.9: Majme pravouhlý lichobežník, do ktorého je vpísaná kružnica, ktorá rozdeľuje jedno jeho rameno na dve časti s dĺžkami 4 a 9. Určte obsah lichobežníka.

Výsledok: 150

Riešenie: Označme všetky body ako na obrázku, pričom W, X, Y a Z sú body dotyku vpísanej kružnice. Zo zadania máme, že $|CZ| = 4$ a $|ZB| = 9$. Z vlastnosti vpísanej kružnice vieme, že susedné úseky od vrcholu lichobežníka po body dotyku sú rovnako dlhé, teda $|WC| = |CZ| = 4$ a $|YB| = |BZ| = 9$. Túto vlastnosť vpísanej kružnice si môžeme ľahko odvodiť. Pozrime sa napríklad na úseky pri vrchole C. Vieme to ukázať z toho, že trojuholníky CWS a CZS sú zhodné, pretože $|WS| = |ZS|$ (polomer kružnice) a uhly majú rovnaké, keďže $|\angle CWS| = |\angle CZS| = 90°$ a $|\angle WCS| = |\angle ZCS|$ (stred vpísanej kružnice je priesečníkom osi uhlov, a teda CS je os uhlu WCZ).



Pätu kolmice z bodu C na úsečku AB označíme P. Potom vieme, že $|PB| = |YB| - |YP| = 9 - |WC| = 9 - 4 = 5$. Vznikol nám pravouhlý trojuholník PBC, ktorého jedna odvesna má dĺžku 5 a prepona dĺžku 13. Z Pytagorovej vety dorátame, že dĺžka druhej odvesny CP je 12. To je zároveň aj výška nášho lichobežníka.

Keďže $|WY| = |CP| = 12$, polomer vpísanej kružnice je 6, teda $|AY| = |DW| = 6$. Teraz vieme, že náš lichobežník má základne s dĺžkami $|DC| = |DW| + |WC| = 6 + 4 = 10$ a $|AB| = |AY| + |YB| = 6 + 9 = 15$. Stačí už len dorátať obsah lichobežníka ako $((10 + 15) \cdot 12)/2 = 150$.

Úloha 1.10: V krajine Stromákovo je 2022 miest, ktoré sú navzájom pospájané cestami. Platí, že z každého mesta idú 1 alebo 3 cesty. Taktiež platí, že z každého mesta sa vieme do akéhokoľvek iného mesta dostať práve jednou trasou (neexistuje cyklus). Koľko je miest, z ktorých vedia iba jedna cesta?

Výsledok: 1012

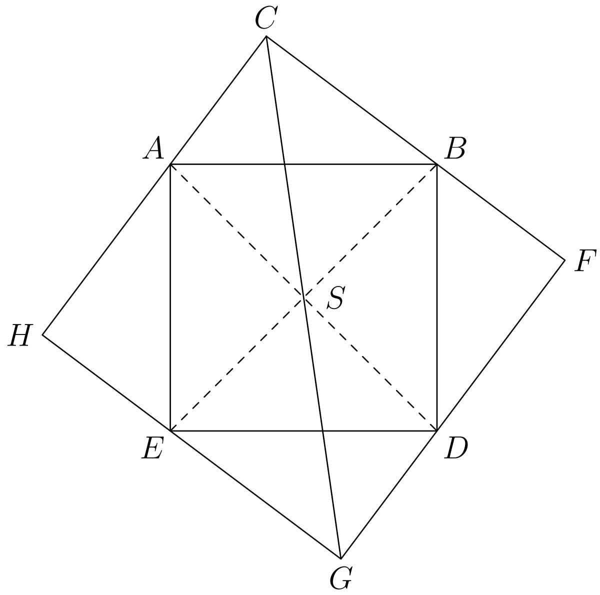
Riešenie: Poďme najprv zistiť, koľko máme dokopy ciest. Zoberme si nejaké mesto, do ktorého vedie jedna cesta a predstavme si, že by zmizlo. Následne môžeme odstrániť aj túto cestu, keďže už nikam nevedie. Takto môžeme postupne odstraňovať mestá a s každým mestom zmizne aj jedna cesta. Napokon zostane iba jedno mesto. To znamená, že ciest bolo o jedna menej ako miest, čiže 2021. Mesto, z ktorého vedie iba jedna cesta, budeme vždy vedieť nájsť, inak by to znamenalo, že existuje cyklus.

Označme si a počet miest, z ktorých vedie jedna cesta a b počet tých, z ktorých vedú tri. Potom musí platiť $a + b = 2022$ a zároveň $a + 3b = 2 \cdot 2021 = 4042$, keďže každú cestu zarátame v meste, kde začína, aj tam, kde končí. Následne rovnice od seba odčítame, čím dostaneme $2b = 2020$ z čoho $b = 1010$ a $a = 1012$. Preto počet miest, z ktorých vedie len jedna cesta je 1012.

Úloha 1.11: Odvesny pravouhlého trojuholníka ABC s pravým uhlom pri vrchole C majú veľkosti a, b. Nad preponou tohto trojuholníka je zvonku zostrojený štvorec. Vypočítajte vzdialenosť stredu tohto štvorca od vrcholu C.

Výsledok: $\frac{\sqrt{2}(a+b)}{2}$

Riešenie: Okolo štvorca $ABDE$ zostrojeného nad preponou AB si rovnako dokreslíme trojuholníky zhodné s trojuholníkom ABC (BDF, DEG, EAH). Vznikol nám štvorec $CFGH$ opísaný štvorcu zo zadania. Prečo je to štvorec? Ukážeme, že bod B leží na strane CF, teda uhol CBF je priamy (obdobne to potom platí aj pre ostatné vrcholy štvorca $ABDE$). Označme α veľkosť uhla CAB, potom $|\angle CBA| = 90° - \alpha$ (z pravouhlého trojuholníka ABC) a $|\angle FBD| = \alpha$ (zo zhodnosti trojuholníkov ABC a BDF). Uhol ABD je pravý ($ABDE$ je štvorec), preto $|\angle CBF| = (90° - \alpha) + 90° + \alpha = 180°$, teda bod B leží na strane CF.

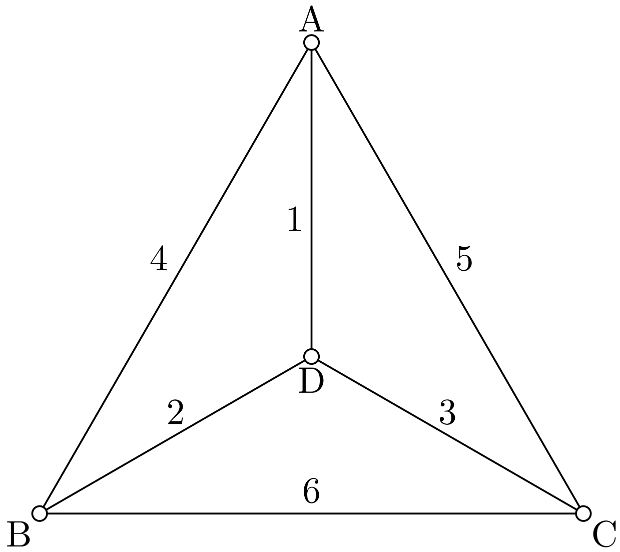


Teraz si musíme uvedomiť, že bod C je stredovo súmerný s bodom G podľa stredu S. Je to viditeľné z toho, ako sme zostrojili zhodné trojuholníky, no vieme si to jednoducho overiť dopočítaním pár uhlov, ktoré obdobne ako v predchádzajúcom odseku ukážu, že uhol CSG je priamy a trojuholníky CSA a GSD sú zhodné podľa vety *sus*. Preto je bod S stredom úsečky CG, teda $|CS| = |SG|$ (vyplýva taktiež zo zhodnosti spomínaných trojuholníkov). Vzdialenosť stredu štvorca S od bodu C je tým pádom polovica uhlopriečky štvorca $CFGH$. Vieme, že dĺžka strany štvorca $CFGH$ je $a+b$, teda môžeme vypočítať dĺžku uhlopriečky CG ako $\sqrt{2(a+b)^2} = \sqrt{2}(a+b)$. Vzdialenosť bodu C od stredu štvorca je $\sqrt{2}(a+b)/2$.

Úloha 1.12: Každú hranu pravidelného štvorstena ofarbíme jednou z troch farieb. Aká je pravdepodobnosť, že aspoň jeden vrchol susedí s hranami troch rôznych farieb?

Výsledok: $\frac{50}{81}$

Riešenie: Pomôžeme si nákresom štvorstenu:



Štvorsten má 6 hrán, všetkých možných ofarbení teda bude 3^6. Poďme zistiť, pri koľkých aspoň jeden vrchol susedí s hranami troch rôznych farieb. Pre každý zo štyroch vrcholov zistíme veľkosť množiny ofarbení, pri ktorých susedí s hranami troch rôznych farieb. Odpoveďou potom bude veľkosť zjednotenia týchto štyroch množín. Na jej výpočet použijeme princíp inklúzie a exklúzie.

Nech M_A je množina ofarbení, pri ktorých vrchol A susedí s hranami troch rôznych farieb. Aká bude veľkosť množiny M_A? Hrany 1, 4 a 5 musia byť ofarbené každá inou farbou, máme teda $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ možností na ich ofarbenie. Hrany 2, 3 a 6 potom môžu byť ofarbené ľubovoľne, máme teda 3^3 možností na ich ofarbenie. Rovnaká úvaha bude platiť pre množiny M_B, M_C a M_D. A teda $|M_A| = |M_B| = |M_C| = |M_D| = 6 \cdot 3^3 = 162$.

Niektoré ofarbenia sme však započítali vo viac ako jednej množine. Označme teda M_{AB} množinu ofarbení, kde vrcholy A a B susedia s hranami troch rôznych farieb. Aká bude veľkosť množiny M_{AB}? Opäť máme $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ možností na ofarbenie hrán 1,4,5. Potom na dofarbenie hrán 2,6 máme len $2 \cdot 1 = 2$ možnosti (musia mať rôzne farby ako hrana 4). Hranu 3 môžme ofarbiť ľubovoľne, to sú teda 3 možnosti. Veľkosť množiny M_{AB} je teda $6 \cdot 2 \cdot 3 = 36$. Rovnaká úvaha bude platiť pre množiny M_{AC}, M_{AD}, M_{BC}, M_{BD} a M_{CD}.

Poďme sa teraz pozrieť na to, ako by vyzeralo ofarbenie, pri ktorom 3 vrcholy susedia s hranami troch rôznych farieb. Nech tieto vrcholy sú A,B,C. Ofarbime nejako hrany 1,4,5 - každú rôznou farbou. Potom hrana 6 nemôže byť ofarbená rovnakou farbou ako hrana 4 (kvôli vrcholu B) ani rovnakou farbou ako hrana 5 (kvôli vrcholu C). Preto musí byť ofarbená rovnakou farbou ako hrana 1. Hrana 2 musí byť ofarbená rovnakou farbou ako hrana 5 (aby vrchol B susedil s hranami troch rôznych farieb) a hrana 3 musí byť ofarbená rovnakou farbou ako hrana 4 (aby vrchol C susedil s hranami troch rôznych farieb). Tým sme však dosiahli to, že aj vrchol D susedí s hranami troch rôznych farieb. Preto jediná možnosť, ako môžu tri vrcholy susediť s hranami troch rôznych farieb je, že všetky štyri vrcholy susedia s hranami troch rôznych farieb. Označme túto množinu M_{ABCD} a poďme zistiť jej veľkosť. Už vieme, že hrany 1,6 musia mať rovnakú farbu, ďalej 2,5 a 3,4. Máme teda iba $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ možností na priradenie farieb jednotlivým dvojiciam, a teda $|M_{ABC}| = |M_{ABD}| = |M_{ACD}| = |M_{BCD}| = |M_{ABCD}| = 6$.

Na záver nám ostáva iba využiť princíp inklúzie a exklúzie na to, aby sme zistili veľkosť X - množiny všetkých ofarbení, pri ktorých aspoň jeden vrchol susedí s hranami troch rôznych farieb. Označme si:

$$\begin{aligned}
M_1 &= |M_A| + |M_B| + |M_C| + |M_D| = 4 \cdot 162 \\
M_2 &= |M_{AB}| + |M_{AC}| + |M_{AD}| + |M_{BC}| + |M_{BD}| + |M_{CD}| = 6 \cdot 36 \\
M_3 &= |M_{ABC}| + |M_{ABD}| + |M_{ACD}| + |M_{BCD}| = 4 \cdot 6 \\
M_4 &= |M_{ABCD}| = 6
\end{aligned}$$

Bude platiť:

$$\begin{aligned}
|X| &= M_1 - M_2 + M_3 - M_4 \\
|X| &= (4 \cdot 162) - (6 \cdot 36) + (4 \cdot 6) - 6 \\
|X| &= 648 - 216 + 24 - 6 \\
|X| &= 450
\end{aligned}$$

Ostáva už len zistiť, akú časť zo všetkých ofarbení tvoria ofarbenia z množiny X:

$$\frac{450}{3^6} = \frac{3^2 \cdot 50}{3^6} = \frac{50}{81}$$

2. časť

Úloha 2.1: Kuchárka naberá slimačiu polievku do misiek. Naberačka má objem 4 decilitre, no z každej plnej naberačky sa jej deciliter vyleje naspäť do hrnca. Na začiatku bolo v hrnci 5 litrov polievky. Koľko decilitrov polievky ostane kuchárke v hrnci, keď už nebude vedieť nabrať ďalšiu plnú naberačku?

Výsledok: 2

Riešenie: Na začiatku naberania bude situácia vyzerať veľmi monotónne. Kuchárka naberie 4 decilitre polievky, z toho sa jej deciliter vyleje naspäť a zvyšok naleje do misky. Z hrnca teda ubudnú tri decilitre polievky, ale stále jej tam bude dosť na to, aby nabrala plnú naberačku. Poďme sa pozrieť, ako to bude vyzerať na konci.

V hrnci bolo na začiatku 50 decilitrov polievky. Jej objem klesal po troch decilitroch dovtedy, kým boli v hrnci aspoň 4 decilitre polievky. Po 15 nabratiach ostalo v hrnci $50 - 15 \cdot 3 = 5$ decilitrov polievky. Kuchárka teda stále môže nabrať plnú naberačku (a vyliať z nej jeden deciliter). Po tomto šestnástom nabratí ostanú v hrnci $5 - 4 + 1 = 2$ decilitre polievky.

Úloha 2.2: Nájdi súčet celočíselných riešení rovnice

$$3^{1+x} + 3^{1-x} = 10.$$

Výsledok: 0

Riešenie:

Vidíme, že aspoň jeden z výrazov $1+x$ a $1-x$ musí byť aspoň 1 (keď je x nezáporné, tak je to $1+x$ a keď je x nekladné, tak je to $1-x$). Zároveň čísla 3^{1+x} aj 3^{1-x} sú kladné, teda ani jedno z nich nemôže byť väčšie ako 10. Navyše x má byť celé, preto mocnina s exponentom aspoň 1 môže byť len 3 alebo 9. Ak by to bolo 3, tak x musí byť rovné nule, čím dostaneme rovnosť $3 + 3 = 10$, ktorá zjavne neplatí. Preto táto mocnina musí byť 9 a x je rovné 1 alebo -1, a potom je druhý sčítanec rovný 1. Máme rovnosť $9 + 1 = 10$, ak $x = 1$ a $1 + 9 = 10$, ak $x = -1$. Teda platí, že celočíselnými riešeniami tejto rovnice sú práve čísla 1 a -1, ktorých súčet je 0.

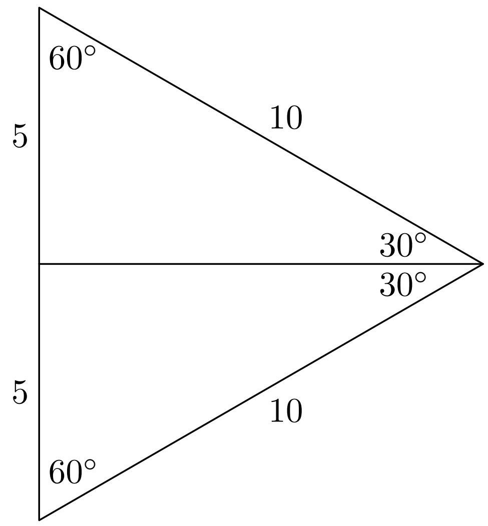
Úloha 2.3: Máme pravouhlý trojuholník s preponou o dĺžke 10, v ktorom veľkosť jedného uhla je dvojnásobkom veľkosti iného. Aký najväčší obsah môže mať daný trojuholník?

Výsledok: 25

Riešenie: Je jasné, že pravý uhol môže byť jeden z dvoch spomínaných uhlov. V takom prípade majú oba zvyšné uhly veľkosť 45° (polovica z 90° je 45° a tretí uhol potom musí mať tiež veľkosť 45°). Takto by bol trojuholník rovnoramenný. Z Pytagorovej vety ľahko spočítame, že obe odvesny sú dlhé $\sqrt{50}$ a obsah trojuholníka je tým pádom 25.

Druhá možnosť je, že podmienka zo zadania hovorí o zvyšných dvoch uhloch. V takom prípade vieme, že veľkosti uhlov sú 90°, 60° a 30° (pretože jeden z „nepravých" uhlov je dvojnásobkom toho druhého), pričom dĺžka prepony je 10.

Predstavme si, že máme takéto trojuholníky dva. Priložme ich k sebe odvesnou, pri ktorej je uhol s veľkosťou 30° tak, aby sme vytvorili väčší trojuholník (ako na obrázku). Takto dostaneme trojuholník, ktorý má všetky uhly rovnako veľké (60°, 60° a $2 \times 30°$) – je rovnostranný. Zároveň však vieme, že dve strany tohto nového trojuholníka sú prepony pôvodného trojuholníka a tretia je tvorená dvomi odvesnami, pri ktorých je uhol s veľkosťou 60°. To znamená, že dĺžka tejto odvesny je 5.



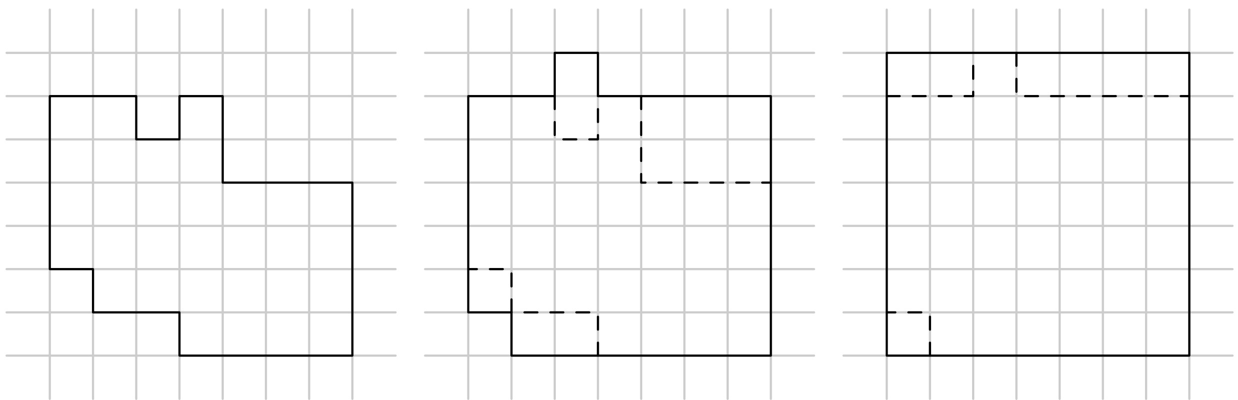
Dĺžku druhej odvesny vieme vypočítať mnohými spôsobmi (napr. Pytagorovou vetou), pričom dostávame dĺžku $\sqrt{100-25}=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$. To znamená, že obsah trojuholníka je $5\times 5\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=25\times\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Nakoniec potrebujeme zistiť, v ktorom prípade je obsah väčší. To vieme zistiť jednoducho. Všimneme si, že $\frac{\sqrt{3}}{2}<1=\frac{\sqrt{4}}{2}$, a teda v prvom prípade bude mať trojuholník väčší obsah. To znamená, že maximálny obsah trojuholníka je 25.

Úloha 2.4: Mucha sa prechádza po štvorčekovom papieri rozmerov $5\times 5\,\mathrm{m}$. Štvorčeky na tomto papieri majú dĺžku strany 10 cm. Mucha sa vydá na cestu po čiarach štvorčekovej siete a po prejdení 5 m sa ocitne na mieste, z ktorého vyšla. Aký najväčší obsah môže mať obrazec ohraničený trasou muchy?

Výsledok: $15\,600\,\mathrm{cm}^2$

Riešenie: Najprv si prevedieme veľkosti v metroch na centimetre, nech máme jednotné zadanie. Vidíme teda, že štvorčekový papier má veľkosť $500\times 500\,\mathrm{cm}$ a dĺžka trasy, ktorú mucha prešla má 500 cm. Po chvíľke skúšania si uvedomíme, že obrazec, ktorý mucha prešla bude konvexný útvar. V našom prípade to bude obdĺžnik alebo štvorec – to preto, lebo ak si nakreslíme nejaký nekonvexný útvar na štvorčekovej sieti, tak si ho vždy vieme prerobiť na konvexný s tým, že zachováme obvod a zväčšíme obsah (ako napr. na obrázku).



Obvod tohto útvaru je 500 cm a nakoľko to je obdĺžnik, tak si to vieme napísať ako $2a+2b$, kde a a b sú dĺžky jeho strán. To znamená, že $a+b=250\,\mathrm{cm}$. Bez ujmy na všeobecnosti si povedzme, že $a\leq b$ a nakoľko vieme, že sa mucha pohybuje len po hranách štvorčekov, tak vieme, že aj a aj b budú násobky 10 cm. Keď si napíšeme možnosti, tak obdĺžnik môže byť rozmerov $10\times 240\,\mathrm{cm}$, $20\times 230\,\mathrm{cm}$, $30\times 220\,\mathrm{cm}$, ..., $110\times 140\,\mathrm{cm}$ a $120\times 130\,\mathrm{cm}$. Keď si začneme postupne počítať obsahy týchto obdĺžnikov ($2400\,\mathrm{cm}^2$, $4600\,\mathrm{cm}^2$, $6600\,\mathrm{cm}^2$, ..., $15\,400\,\mathrm{cm}^2$, $15\,600\,\mathrm{cm}^2$), tak ľahko uvidíme, že čím viac sa a a b k sebe blížia, tým je obsah väčší. Nakoľko sme týmto vyskúšali všetky možnosti, tak vieme, že najväčší obsah, ktorý mohla mucha ohraničiť, je $15\,600\,\mathrm{cm}^2$.

Úloha 2.5: Nájdite počet neusporiadaných trojíc prirodzených čísel spĺňajúcich

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1.$$

Výsledok: 3

Riešenie: Keďže hľadáme neusporiadané trojice, tak bez ujmy na všeobecnosti môžme predpokladať, že $a \leq b \leq c$.

Skúsime nájsť ohraničenie pre a. Rovno vidíme, že $a > 1$, keďže pre $a = 1$ by rovnica v prirodzených číslach nemohla platiť. Zároveň vieme povedať, že $a < 4$, lebo v opačnom prípade, keďže $a \leq b \leq c$, by platilo:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} < 1.$$

Ostáva nám rozobrať prípady, kde $a = 2$ alebo $a = 3$. Pôvodnú rovnicu vieme upraviť do tvaru $bc + ac + ab = abc$

- Nech $a = 2$: po dosadení máme $bc + 2c + 2b = 2bc$, čiže $2c + 2b = bc$. Z nášho predpokladu vieme, že $4c \geq 2c + 2b = bc$, a teda $4 \geq b$. Z predpokladu $a \leq b$ máme, že $2 \leq b$. Následne po dosadení do rovnice a vyskúšaní všetkých troch možností $b = 4, 3, 2$ nám správne vyjdú riešenia $b = 4, c = 4$ a $b = 3, c = 6$.
- Nech $a = 3$: po dosadení dostávame $bc + 3c + 3b = 3bc$, čiže $3c + 3b = 2bc$. Analogicky keďže $6c \geq 3c + 3b = 2bc$, tak $3 \geq b$, ale $a \leq b$. Ostala nám len možnosť $b = 3$. Z čoho dostávame vyhovujúce riešenie $b = 3, c = 3$.

Dokopy nám vyšli tri vyhovujúce trojice čísel, a to $2, 4, 4$, potom $2, 3, 6$ a $3, 3, 3$.

Úloha 2.6: Každý z hudobníkov ovláda hru na ukulele, bongo aj kazoo. V pondelok chceli vytvoriť kapelu s jedným hráčom na kazoo a troma hráčmi na bongo. Potom jeden z nich odcestoval do zahraničia, a tak sa v utorok rozhodli vytvoriť kapelu s jedným hráčom na ukulele, jedným hráčom na bongo a jedným hráčom na kazoo. Zistili, že oba dni mali rovnaký počet možností, ktorými danú kapelu poskladať (vybrať členov kapely a priradiť im jednotlivé hudobné nástroje). Koľko je všetkých hudobníkov?

Výsledok: 6

Riešenie: Nech n je počet hudobníkov. Počet možností, ktorými mohli vytvoriť kapelu v pondelok, bude $n \cdot \binom{n-1}{3}$ – najprv vyberieme hráča na kazoo, potom zo zvyšných $n-1$ hráčov vyberieme troch, ktorí budú hrať na bongo. Počet možností, ktorými mohli vytvoriť kapelu v utorok, vieme vyjadriť ako $\binom{n-1}{3} \cdot 3!$ – vyberieme troch členov kapely z možných $n-1$ hudobníkov (jeden odcestoval) a následne máme $3!$ možností, ako im priradiť jednotlivé hudobné nástroje. Teraz už len ostáva dať tieto dva výrazy do rovnosti:

$$n \cdot \binom{n-1}{3} = \binom{n-1}{3} \cdot 3!$$
$$n = 3!$$
$$n = 6$$

Úloha 2.7: Vyriešte v obore reálnych čísel nasledujúcu sústavu rovníc:

$$x + xy + xy^2 = 28$$
$$x^2y + x^2y^2 + x^2y^3 = 224.$$

Nájdite všetky riešenia.

Výsledok: $(4, 2)$ a $(16, 1/2)$

Riešenie: Druhú rovnicu si upravme do tvaru:

$$xy(x + xy + xy^2) = 224.$$

Všimnime si, že výraz v zátvorke je rovnaký ako ľavá strana prvej rovnice zo zadania, a teda je rovný 28. Preto $xy = 224/28 = 8$.

Teraz sa pozrime na prvú rovnicu. Vieme, že $xy = 8$, z čoho si x môžeme vyjadriť ako $\frac{8}{y}$ (vieme, že y nie je 0) a xy^2 si môžeme vyjadriť ako $8y$.

Po dosadení týchto vyjadrení do prvej rovnice dostávame:

$$x + xy + xy^2 = \frac{8}{y} + 8 + 8y = 28$$

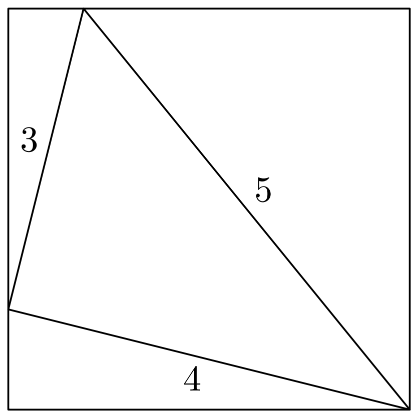
Túto rovnicu môžeme vynásobiť $\frac{y}{4}$ a upraviť do tvaru:

$$2y^2 - 5y + 2 = 0$$

Dostali sme obyčajnú kvadratickú rovnicu, ktorú môžeme vyriešiť napríklad dosadením do vzorca na riešenie kvadratických rovníc a dostaneme, že y je 2 alebo $1/2$.

Pomocou vzťahu $xy = 8$ už vieme k daným y ľahko dorátať príslušné x. Dostávame dve riešenia, a to $(4, 2)$ a $(16, 1/2)$.

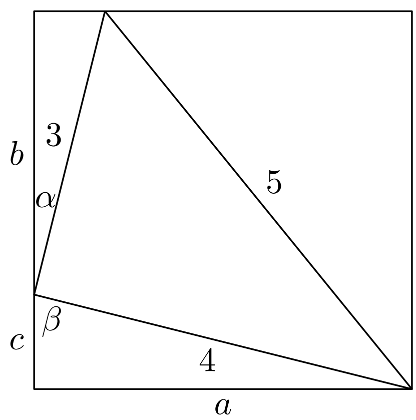
Úloha 2.8: Do štvorca je vpísaný trojuholník so stranami 3, 4 a 5. Akú dlhú má štvorec stranu?



Výsledok: $\frac{16}{\sqrt{17}}$

Riešenie: Všimnime si, že $3^2 + 4^2 = 5^2$ a podľa Pytagorovej vety vieme, že vnútorný trojuholník je, rovnako ako vonkajšie, pravouhlý. Z toho vyplýva, že súčet $\alpha + \beta = 90°$, pretože uhol medzi odvesnami dĺžok 3 a 4 je pravý.

Keď sa pozrieme na trojuholník s preponou 3 vidíme, že jeden jeho nepravý uhol je α, a teda druhý musí byť β. Analogicky v trojuholníku s preponou 4 máme aj α. Z toho vyplýva, že tieto dva trojuholníky sú podobné.



Čiže pomer strán a a b bude rovnaký ako pomer ich prepôn, čo je 4 ku 3, preto b sú tri štvrtiny a. Z toho nám vychádza, že c je štvrtina a, teda $a = 4c$. Teraz si vyjadrime preponu 4 len pomocou c:

$$4^2 = c^2 + (4c)^2 = 17c^2$$

$$\frac{16}{17} = c^2$$

$$c = \sqrt{\frac{16}{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

Strana štvorca je $\frac{16}{\sqrt{17}}$ (keďže $a = 4c$).

Úloha 2.9: Každý zo šiestich stromákov má tričko inej farby. Ak si tieto tričká náhodne povymieňajú, s akou pravdepodobnosťou bude mať práve jeden stromák oblečené svoje tričko?

Výsledok: $\frac{11}{30}$

Riešenie: Keďže tričká si vymieňali úplne náhodne, tak na určenie pravdepodobnosti nám stačí počet priaznivých možností vydeliť počtom všetkých možností, ako mohlo vymieňanie dopadnúť. V tomto prípade sú priaznivé možnosti tie, keď práve jeden stromák má na sebe svoje tričko.

Poďme spočítať počet všetkých možností. Môžeme si to predstaviť tak, že stromáci sa postavili do radu a postupne si každý z nich zobral jedno náhodné tričko. To znamená, že prvý si mohol vybrať zo 6 tričiek, druhý už len z 5 tričiek, ..., piaty z 2 tričiek a šiestemu zostalo len 1 tričko. Počet všetkých možností je preto $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

Teraz poďme spočítať počet priaznivých možností. Najprv vyberieme jedného človeka, ktorý dostal svoje tričko, na to máme 6 možností. Teraz spočítajme koľko je možností na to, ako mohlo dopadnúť vymieňanie tričiek medzi zvyšnými piatimi, ak vieme, že nikto z nich už nedostal svoje tričko. Stromáci si vymenia tričko do kruhu práve vtedy, ak sa postavia do kruhu a každý podá svoje tričko stromákovi napravo od seba. Môžeme si rozmyslieť, že pri vymieňaní tričiek každý stromák patrí do práve jedného kruhu.

Rozoberme dve možnosti, ktoré mohli nastať: buď si nejaká dvojica vymenila tričká do kruhu (čiže navzájom) alebo nie.

Ak si nejaká dvojica vymenila tričká do kruhu, tak potom zvyšní traja si ich museli vymeniť do kruhu (inak by sa stalo, že niekto z tých troch by mal svoje tričko). Na vybratie dvojice máme $\binom{5}{2} = 10$ možností. Zvyšná trojica si mohla vymeniť tričká do kruhu 2 spôsobmi (prvý má dve možnosti, komu dá svoje tričko, zvyšní to už potom majú určené). Dokopy to je $10 \cdot 2 = 20$ možností.

Ak si žiadna dvojica nevymenila tričká do kruhu, tak potom si ich museli vymeniť do kruhu všetci piati (ak by tam vznikol kruh troch, tak by automaticky vznikol aj kruh dvoch, a ak by vznikol kruh štyroch, tak by zostal jeden so svojím tričkom). Na vytvorenie kruhu z piatich ľudí máme $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ možností. Je to preto, lebo kruh je v skutočnosti rad piatich ľudí, ktorému spojíme začiatok s koncom. Na zoradenie piatich ľudí máme $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ možností, ale v kruhu žiaden začiatok nie je, preto musíme tento počet vydeliť piatimi (napr. zoradenia 12345, 23451, 34512, 45123 a 51234 nám po spojení dajú rovnaký kruh).

Dokopy máme $6 \cdot (20 + 24) = 264$ priaznivých možností, teda výsledná pravdepodobnosť je $\frac{264}{720} = \frac{11}{30}$.

Úloha 2.10: Nech x, y sú kladné celé čísla. Nájdite všetky možné hodnoty $x^2 + y^2$, ak viete, že platí $x^2y + y^2x = 880$ a $xy + x + y = 71$.

Výsledok: 146

Riešenie:

Upravme prvú rovnicu (vybratím xy pred zátvorku):

$$\begin{aligned} x^2y + y^2x &= 880 \\ xy \cdot (x+y) &= 880 \end{aligned}$$

Potom po substitúcii $a = xy$ a $b = x + y$ dostaneme z našich rovníc dve nové rovnice:

$$\begin{aligned} ab &= 880 \\ a + b &= 71 \end{aligned}$$

Ak $a = 71 - b$ z druhej rovnice dosadíme do prvej rovnice, tak dostaneme:

$$\begin{aligned} (71-b) \cdot b &= 880 \\ 71b - b^2 &= 880 \\ 0 &= b^2 - 71b + 880 \\ b &= \frac{71 \pm \sqrt{71^2 - 4 \cdot 880}}{2} \\ b &= \frac{71 \pm \sqrt{5041 - 3520}}{2} \\ b &= \frac{71 \pm 39}{2} \\ b_1 &= 55 \implies a_1 = 16 \\ b_2 &= 16 \implies a_2 = 55 \end{aligned}$$

Keďže x a y sú kladné celé čísla, možnosť $a = 16$, $b = 55$ nemôže platiť – jediné možnosti na súčin 16 sú $(1, 16)$, $(2, 8)$ a $(4, 4)$ a ani jedna nedáva požadovaný súčet. Preto platí $a = 55$, $b = 16$, a teda $xy = 55$, $x + y = 16$. Po dosadení $x = 16 - y$ dostaneme:

$$\begin{aligned} (16-y)y &= 55 \\ 16y - y^2 &= 55 \\ 0 &= y^2 - 16y + 55 \\ 0 &= (y-5)(y-11) \\ y_1 &= 5 \implies x_1 = 11 \\ y_2 &= 11 \implies x_2 = 5 \end{aligned}$$

Teda hodnota výrazu $x^2 + y^2$ bude vždy rovná $5^2 + 11^2 = 25 + 121 = 146$.

Úloha 2.11: Nech $a_{10} = 10$ a pre všetky prirodzené n väčšie ako 10 platí $a_n = 100a_{n-1} + n$. Nájdite najmenšie prirodzené číslo n väčšie ako 10 také, že a_n je násobkom 99.

Výsledok: 45

Riešenie: Vyjadríme si pomocou vzťahu zo zadania súčet členov postupnosti od a_{10} po a_n. Dostaneme:

$$a_n + a_{n-1} + \cdots + a_{11} + a_{10} = (100a_{n-1} + n) + (100a_{n-2} + n - 1) + \cdots + (100a_{10} + 11) + a_{10}$$

Po úprave a dosadení $a_{10} = 10$ máme:

$$a_n + (a_{n-1} + \cdots + a_{11} + a_{10}) = 100(a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots a_{10}) + n + (n-1) + \cdots + 11 + 10$$

Následne si z danej rovnice vyjadríme a_n. Po sčítaní čísel od 10 po n dostaneme:

$$a_n = 99(a_{n-1} + a_{n-2} + \dots a_{10}) + \frac{(n+10)(n-9)}{2}$$

Z tohto vyjadrenia a_n vidíme, že bude deliteľné 99 práve vtedy, keď $\frac{(n+10)(n-9)}{2}$ bude deliteľné 99, čiže ak $(n+10)(n-9)$ bude deliteľné 99. To sa stane práve vtedy, ak aspoň jedna zo zátvoriek bola deliteľná 11 a zároveň celý výraz bude deliteľný 9.

Najprv volíme $n+10$ tak, aby bolo deliteľné 11 a n bolo väčšie ako 10:

$n+10$	n	$n-9$	výraz $(n+10)(n-9)$ je deliteľný 9
22	12	3	nie
33	23	14	nie
44	34	25	nie
55	45	36	áno

V tomto prípade je teda najmenšie vyhovujúce $n = 45$.

Druhá možnosť je, že volíme $n-9$ tak, aby bolo deliteľné 11 a n bolo väčšie ako 10:

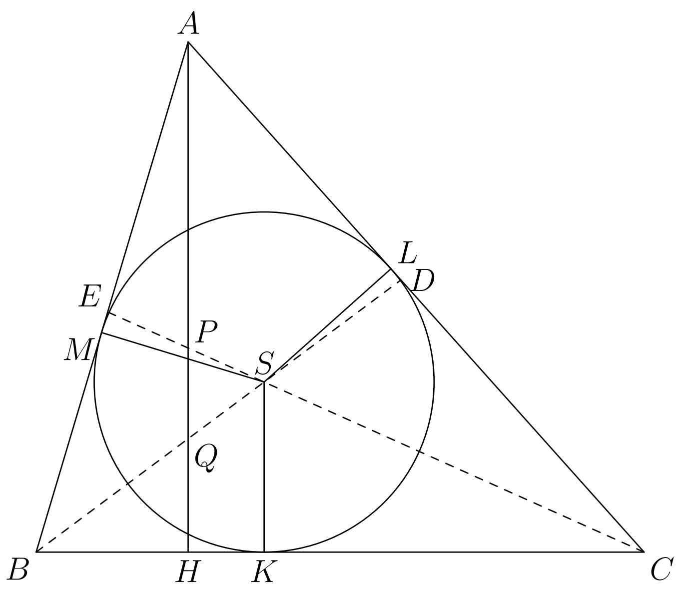
$n-9$	n	$n+10$	výraz $(n+10)(n-9)$ je deliteľný 9
11	20	30	nie
22	31	41	nie
33	42	52	nie
44	53	63	áno

Najmenšie vyhovujúce riešenie je v tomto prípade $n = 53$, čo je ale vyššie ako riešenie nájdené v prvej možnosti.

Úloha 2.12: Majme trojuholník ABC, kde $|AB| = 7$, $|BC| = 8$ a $|CA| = 9$. Nech AH je výška na stranu a. Nech BD a CE sú postupne osi uhlov ABC a BCA, pričom body D a E ležia na stranách trojuholníka ABC. Označme priesečník BD a AH ako Q a priesečník CE a AH ako P. Zistite dĺžku úsečky PQ.

Výsledok: $\frac{8\sqrt{5}}{15}$

Riešenie: Priesečník úsečiek BD a CE, čiže stred vpísanej kružnice trojuholníku ABC, si označme ako S. Body dotyku tejto kružnice so stranami trojuholníka BC, AC a AB si označme ako K, L a M v tomto poradí. Úsečky SK, SL a SM sú teda kolmé na strany BC, AC a AB.



Trojuholníky SKC a PHC sú podobné podľa vety uu. Oba trojuholníky sú pravouhlé a zdieľajú uhol pri vrchole C. Pomer ich príslušných strán je potom rovnaký:

$$\frac{|CH|}{|CK|} = \frac{|PH|}{|SK|}$$
$$\frac{8-|BH|}{|CK|} = \frac{|PQ|}{|SK|} + \frac{|HQ|}{|SK|}$$

Rovnako sú podobné aj trojuholníky SKB a QHB. Z toho zase vyplýva:

$$\frac{|BH|}{|BK|} = \frac{|HQ|}{|SK|}$$
$$\frac{|BH|}{8-|CK|} = \frac{|HQ|}{|SK|}$$

Dosadením druhej rovnice do prvej dostaneme:

$$\frac{8-|BH|}{|CK|} = \frac{|PQ|}{|SK|} + \frac{|BH|}{8-|CK|}$$

Z tejto rovnice vieme $|PQ|$ vyjadriť ako:

$$|PQ| = 8|SK|\left(\frac{8-|CK|-|BH|}{|CK|(8-|CK|)}\right)$$

Teraz si vyčíslime jednotlivé neznáme - začneme s $|CK|$. Trojuholníky SKC a SLC sú zhodné podľa vety usu, keďže $|\angle SKC| = |\angle SLC| = 90°$, $|\angle KCS| = |\angle LCS| = \frac{|\angle ACB|}{2}$ a stranu SC zdieľajú. Z toho vyplýva, že $|CK| = |CL|$ a analogicky aj $|AL| = |AM|$ a $|BM| = |BK|$. Tieto dĺžky si označíme postupne ako x, y, z a vytvoríme sústavu troch rovníc o troch neznámych:

$$x + y = 9 \qquad y + z = 7 \qquad z + x = 8$$

Vyriešením tejto sústavy dostaneme pre nás dôležitý údaj $x = |CK| = 5$.

Pozrime sa teraz na hodnoty $|SK|$ a $|BH|$. Osi vnútorných uhlov trojuholníka ABC nám ho rozdelili na 6 pravouhlých trojuholníkov. Všetky tieto trojuholníky majú jednu rovnako dlhú výšku, ktorou je polomer vpísanej kružnice $|SK|$. Sčítaním ich obsahov získame obsah veľkého trojuholníka ABC:

$$\frac{|SK|\cdot x}{2}\cdot 2 + \frac{|SK|\cdot y}{2}\cdot 2 + \frac{|SK|\cdot z}{2}\cdot 2 = S$$
$$|SK|(x+y+z) = S$$

Nakoľko $2x+2y+2z = 7+8+9$, tak $x+y+z = 12$, teda dosadením zistíme, že $|SK| = \frac{1}{12}S$. Obsah trojuholníka ABC by sme vedeli vypočítať aj pomocou výšky AH na stranu BC, teda $S = \frac{8|AH|}{2}$. Po dosadení dostávame $|AH| = 3|SK|$. Teraz už vieme z Pytagorových viet pre trojuholníky ABH a ACH vytvoriť sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych:

$$7^2 = |BH|^2 + (3|SK|)^2 \qquad 9^2 = (8-|BH|)^2 + (3|SK|)^2$$

Jej vyriešením dostaneme $|BH| = 2$ a $|SK| = \sqrt{5}$. Dosadením do vzťahu pre $|PQ|$ získame výsledok.

3. časť

Úloha 3.1: Aké je najmenšie číslo deliteľné 12, ktoré sa skladá z práve šiestich jednotiek a ľubovoľného počtu troják a núl?

Výsledok: 11 111 100

Riešenie: Na to, aby číslo bolo deliteľné 12, musí byť deliteľné 4 a 3, pretože $12 = 2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3$.

Deliteľnosť tromi určujeme podľa ciferného súčtu – ten má rovnaký zvyšok po delení 3 ako samotné číslo. Čiže naše výsledné číslo musí mať ciferný súčet deliteľný 3. Všimnime si, že to bude splnené, keďže súčet šiestich jednotiek je deliteľný troma, a keď k nemu pripočítame ešte niektorú ďalšiu cifru (3 alebo 0), tak sa zvyšok po delení 3 nezmení.

Deliteľnosť štyrmi určujeme podľa posledných dvoch cifier čísla – dvojčíslie, ktoré tvoria, musí byť deliteľné 4. Uvedomme si, že žiadne z dvojčíslí 01, 03, 10, 11, 13, 30, 31, 33 nie je deliteľné 4, a teda na konci nášho čísla musí byť posledné možné dvojčíslie – 00.

Keďže chceme vytvoriť čo najmenšie číslo, chceme k šiestim jednotkám pridať čo najmenej cifier. Najmenšie číslo spĺňajúce zadanie preto získame tak, že pridáme iba dve nuly na koniec (aby číslo bolo deliteľné 4) a dostaneme číslo 11 111 100.

Úloha 3.2: Zistite, koľkokrát väčšie je číslo $x = 103!$ ako číslo $y = 101! + 102!$.

Výsledok: 102

Riešenie: Povedzme, že x je a-krát väčšie ako y ($x = ay$). Dosaďme za x a y naše čísla:

$$103! = a \cdot (101! + 102!)$$

Máme rovnicu o jednej neznámej, takže už len vyjadríme a dopočítame a:

$$a = \frac{103!}{101! + 102!} = \frac{103 \cdot 102 \cdot 101!}{101! \cdot (1 + 102)} = \frac{103 \cdot 102}{103} = 102$$

Vidíme, že x je 102-krát väčšie ako y.

Úloha 3.3: V štvorčekovej sieti si zvolíme niekoľko mrežových bodov (bodov s celočíselnými súradnicami). Koľko najmenej bodov musíme zvoliť, aby sme si boli istí, že stred niektorej z úsečiek tvorenej zvolenými bodmi je tiež mrežovým bodom?

Výsledok: 5

Riešenie: Všimnime si, ako sa správajú súradnice stredu úsečky vzhľadom na jej krajné body. Podľa x-ovej súradnice leží stred úsečky presne v strede medzi jej krajnými bodmi, a teda jeho x-ová súradnica bude aritmetickým priemerom x-ových súradníc krajných bodov. Analogicky aj y-ová.

Na to, aby bol stred tiež mrežovým bodom, musí byť súčet rovnakých súradníc krajných bodov párne číslo – aby po delení dvomi to bolo stále celé číslo.

Pozrime sa teda na paritu súradníc jednotlivých bodov. Máme 4 možnosti ako to môže vyzerať – (p, p), (p, n), (n, n), (n, p) – pričom si môžeme všimnúť, že súčet ľubovoľných dvoch rôznych možností nedáva (p, p), avšak akonáhle by sme mali dve rovnaké dvojice, tak ich súčet je (p, p).

Takže pre 4 body sa môže stať, že priemer žiadnych dvoch z nich nebude mať celočíselné súradnice, avšak pri piatich už máme istotu, že sa tu budú nachádzať dva body s rovnakým paritným typom, a teda stred úsečky, ktorá ich spája, bude tiež mrežový bod.

Úloha 3.4: Nájdite súčet všetkých cifier v prirodzených číslach menších ako 1000.

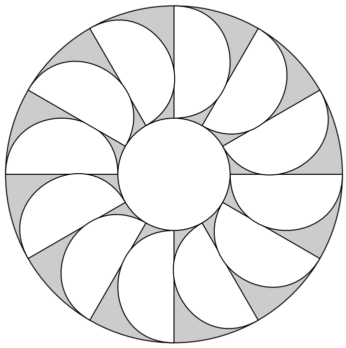
Výsledok: 13 500

Riešenie: Najprv si sčítajme všetky cifry od 1 po 9. Vieme, že ich súčet je 45. Pozrime sa teraz na cifry na mieste stoviek. Vieme, že každá z cifier od 1 do 9 sa na takýchto miestach nachádza práve stokrát (od 100 do 199, od 200 do 299, a tak podobne), teda ich súčet je $100 \cdot 45 = 4500$.

Teraz sa pozrime na miesta desiatok. V každej stovke je 10 desiatok, pričom každá začína inou cifrou (od 0 po 9, od 10 po 19, …), a preto sa v každej stovke nachádza každá cifra na mieste desiatok práve desaťkrát. Dokopy však máme 10 stoviek (ako prvú stovku rátame 0 až 100), a preto sa každá z cifier na mieste desiatok nachádza dokopy stokrát, teda ich súčet je opäť $100 \cdot 45 = 4500$.

Keď sa teraz pozrieme na miesta jednotiek, tak vidíme, že v rámci jednej desiatky sa na mieste jednotiek objavuje každá cifra práve raz. V rámci stovky máme 10 desiatok, a teda je tam každá cifra na mieste jednotiek desaťkrát, a keďže máme 10 stovák, tak vieme, že na mieste jednotiek sa dokopy každá cifra nachádza práve stokrát, a preto je ich súčet opäť $100 \cdot 45 = 4500$. Celkový súčet všetkých cifier v číslach menších ako 1000 je teda $3 \cdot 4500 = 13500$.

Úloha 3.5: Na obrázku máme dve sústredné kružnice a 12 zhodných dotýkajúcich sa polkruhov, ktoré ležia v medzikruží a krajnými bodmi sa dotýkajú kružníc. Priemery polkruhov ležia na priemere vonkajšej kružnice a zároveň ich veľkosť je zhodná veľkosti priemeru menšej zo sústredných kružníc. Aká časť medzikružia je zafarbená na sivo?



Výsledok: $\frac{1}{4}$

Riešenie: Keďže priemery polkruhov ležia na priemere veľkej kružnice a je ich párny počet, tak priemery dvoch protiľahlých polkruhov ležia na tom istom priemere veľkej kružnice. Vzhľadom na to, že malá kružnica je sústredná s veľkou, všetky jej priemery ležia na priemeroch veľkej.

Z toho vyplýva, že priemery dvoch polkruhov a priemer malej kružnice tvoria dokopy priemer veľkej kružnice. Menšie priemery sú zhodné, a teda priemer veľkej je trojnásobkom priemeru malých.

Obsah medzikružia vieme vypočítať ako rozdiel obsahov veľkého a malého kruhu.

$$\pi(3r)^2 - \pi r^2 = 9\pi r^2 - \pi r^2 = 8\pi r^2$$

Polkruhy tvoria dokopy 6 kruhov, ktoré sú zhodné s malým kruhom, teda ich obsah je $6\pi r^2$.

Potom pomer týchto dvoch obsahov je

$$\frac{6\pi r^2}{8\pi r^2} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

A keďže nás zaujíma akú čast tvorí sivá časť, tak to bude ten zvyšok do jedna – teda $\frac{1}{4}$.

Úloha 3.6: Koľko existuje kladných celých čísel n, pre ktoré platí, že $n + 3$ delí $n^2 + 27$?

Výsledok: 6

Riešenie: Ak vydelíme polynóm $n^2 + 27$ polynómom $n + 3$, tak zistíme, že platí

$$\frac{n^2 + 27}{n + 3} = n - 3 + \frac{36}{n + 3}.$$

Z toho vidíme, že musí platiť, že $n + 3$ delí 36. Prejdením všetkých možných deliteľov 36 (sú to 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 a 36) a vylúčením tých, pre ktoré n vyjde nekladné, zistíme, že možné hodnoty n sú 1, 3, 6, 9, 15 a 33, takže odpoveď je 6.

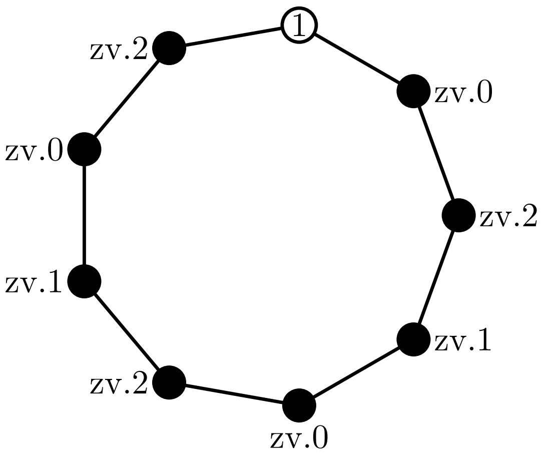
Úloha 3.7: Vrcholy pravidelného deväťuholníka sú očíslované číslami 1 až 9 tak, aby súčet čísel v troch susedných vrcholoch bol vždy násobkom 3. Dve očíslovania sú rovnaké, ak jedno dostaneme z druhého len otočením deväťuholníka v rovine. Koľko rôznych očíslovaní existuje?

Výsledok: 144

Riešenie: Pozrime sa najprv na to, aké čísla sa môžu nachádzať v dvoch vrcholoch napravo od vrcholu s číslom 1 (toto číslo sme si zvolili len pre jednoduchosť - vyriešiť úlohu by sa samozrejme dalo aj zvolením iného pevného bodu). Keďže ich súčet má byť deliteľný tromi, súčet dvoch zvyšných čísel musí dávať po delení tromi zvyšok 2. Zvyšky týchto čísel po delení tromi sú teda buď 1 a 1, 0 a 2 alebo 2 a 0.

Ak by to boli zvyšky 1 a 1, mali by sme pri sebe 3 čísla so zvyškom 1, čiže zvyšné čísla by mali už len zvyšky 0 alebo 2. Vrchol naľavo od jednotky by sme potom vedeli obsadiť len zvyškom 2 alebo 0, takže zvyšok súčtu troch vrcholov s jednotkou v strede po delení tromi by bol buď 2 $(0 + 1 + 1)$, alebo 1 $(2 + 1 + 1)$. Táto možnosť k platnému očíslovaniu nevedie.

V prípade, že sú to zvyšky 0 a 2 v tomto poradí, si môžme vyčísliť aj ďalšie zvyšky v smere hodinových ručičiek tak, aby posledná trojica bola deliteľná tromi. Štvrté číslo musí dávať zvyšok 1, lebo súčet druhého a tretieho dávajú zvyšok 2, piate číslo zvyšok 0, šieste číslo zvyšok 2, siedme 1, ôsme 0, deviate 2 a potom už sme opäť na začiatku, pri jednotke.



Teraz zrátame počet možností, ako čísla od 2 do 9 takto usporiadať. Na pozície so zvyškom 0 po delení tromi musíme umiestniť čísla 3,6 a 9, čo nám dáva $3! = 6$ možností. Pozície so zvyškom 2 obsadzujeme číslami 2,5 a 8, čo vieme spraviť opäť 6 možnosťami, a na pozície so zvyškom 1 umiestnime čísla 4 a 7, čo sú len 2 možnosti. Dokopy je to teda $6 \cdot 6 \cdot 2 = 72$ možností.

Pre prípad, že po jednotke nasledujú čísla so zvyškami 2 a 0 v tomto poradí, si stačí už len uvedomiť, že zvyšky v deväťuholníku sú presne v opačnom poradí ako v predchádzajúcom prípade (ako keby sme deväťuholník zrkadlovo prevrátili). Budeme tu preto mať rovnako 72 možností. Dohromady teda dostaneme 144 možností.

Úloha 3.8: Majme dve kladné celé čísla m a n menšie ako 1000. Vieme, že ich aritmetický a geometrický priemer sú za sebou idúce nepárne čísla. Aký najväčší rozdiel môžu čísla m a n dosahovať?

Výsledok: 120

Riešenie: Nech platí $1000 > m \geq n > 0$. Chceme potom maximalizovať rozdiel $m - n$.

Vďaka AG-nerovnosti (ktorú si vieme ľahko dokázať) vieme, že geometrický priemer dvoch čísel je vždy menší alebo rovný ich aritmetickému priemeru. Keďže v zadaní máme, že sú to dve po sebe idúce nepárne čísla, tak platí:

$$\frac{m+n}{2} = \sqrt{mn} + 2$$

Danú rovnicu vieme upraviť nasledovne:

$$\begin{aligned} m + n &= 2\sqrt{mn} + 4 \\ (\sqrt{m})^2 - 2\sqrt{mn} + (\sqrt{n})^2 &= 4 \\ (\sqrt{m} - \sqrt{n})^2 &= 4 \end{aligned}$$

Keďže platí $m \geq n$, tak dostávame $\sqrt{m} - \sqrt{n} = 2$.

V aktuálnej situácii teda chceme maximalizovať $m - n$, pričom vieme, že rozdiel ich odmocnín je fixne daný vzťahom $\sqrt{m} - \sqrt{n} = 2$. Chceme dosiahnuť, aby $\sqrt{m}$ a $\sqrt{n}$ boli čo najväčšie možné, pretože s vyššími číslami sa zväčšujú rozdiely medzi ich druhými mocninami. Keďže platí $1000 > m, n$, tak z toho dostávame ohraničenie $32 > \sqrt{m}, \sqrt{n}$. Najväčšie možné hodnoty sú teda $\sqrt{m} = 31$ a $\sqrt{n} = 29$.

Odtiaľ dostávame $m = 961$ a $n = 841$. Ich rozdiel je teda $961 - 841 = 120$. Zároveň platia podmienky zo zadania, keďže ich aritmetický priemer je $\frac{961+841}{2} = 901$ a geometrický priemer je $\sqrt{961 \cdot 841} = \sqrt{808201} = 899$.

Úloha 3.9: Pri piatich hodoch podvodníckou mincou je rovnaká pravdepodobnosť, že padne práve jedna hlava, ako pravdepodobnosť, že padnú práve dve hlavy. Aká je pravdepodobnosť, že padnú práve tri hlavy z piatich hodov?

Výsledok: $\frac{40}{243}$

Riešenie: Označme si pravdepodobnosť padnutia hlavy na minci pri jednom hode h. Potom pravdepodobnosť, že padne znak vyjadríme ako $1-h$. Poďme vyjadriť pravdepodobnosti situácií zo zadania. Pravdepodobnosť, že hlava padne práve v prvom hode a zvyšné štyri hody padne znak, je $h(h-1)^4$. S takou istou pravdepodobnosťou padne hlava aj v práve druhom hode, v práve treťom hode a tak ďalej. Máme päť rôznych miest, kde mohla padnúť hlava, takže pravdepodobnosť, že padne práve jedna hlava, je $5h(1-h)^4$. Podobne si vyjadríme aj pravdepodobnosť druhej situácie. Pravdepodobnosť, že hlavy padnú práve v prvých dvoch bodoch, je $h^2(h-1)^3$. Možností na výber dvoch hodov, v ktorých padnú hlavy, je spolu $\binom{5}{2} = 10$. Celková pravdepodobnosť je potom $10h^2(h-1)^3$. Nájdené pravdepodobnosti sú podľa zadania v rovnosti:

$$\begin{aligned} 5h(1-h)^4 &= 10h^2(1-h)^3 \\ (1-h) &= 2h \\ h &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Určili sme pravdepodobnosť padnutia hlavy na podvodníckej minci. Ostáva nám už len vypočítať pravdepodobnosť tretej situácie zo zadania, teda že z piatich hodov padnú práve tri hlavy:

$$\binom{5}{3} h^3(1-h)^2 = 10\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{40}{243}.$$

Úloha 3.10: Koľko deliteľov čísla 2020^{2020} má presne 2020 deliteľov?

Výsledok: 54

Riešenie: Najprv rozložíme 2020 na prvočísla: $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$. Všetky delitele čísla 2020^{2020} budú teda v tvare $2^a \cdot 5^b \cdot 101^c$.
Teraz si pripomeňme vzorec na výpočet D_x - počtu deliteľov čísla $x = {p_1}^{a_1}{p_2}^{a_2}\dots {p_{n-1}}^{a_{n-1}}{p_n}^{a_n}$ (prvočíselný rozklad čísla x):

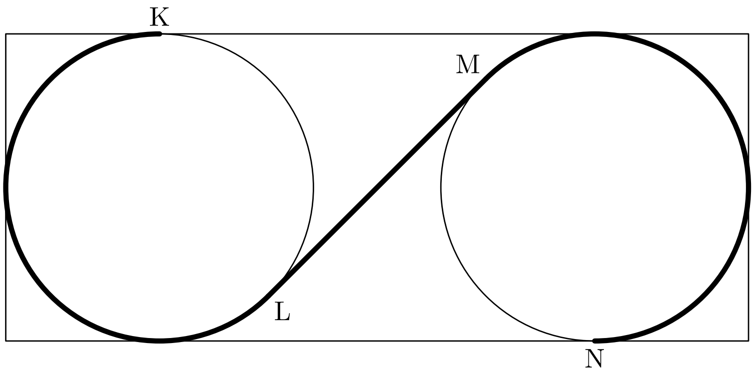
$$D_x = (a_1+1)(a_2+1)\dots(a_{n-1}+1)(a_n+1)$$

Pre delitele spĺňajúce podmienku teda musí platiť:

$$2020 = (a+1)(b+1)(c+1)$$

Pýtame sa teda na to, koľkými spôsobmi vieme rozdeliť 2020 na súčin troch čísel. Už vieme, že $2020 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101$, a teda tieto 4 prvočísla chceme rozdeliť do troch činiteľov $(a+1, b+1, c+1)$. Je 6 možností, ako umiestniť dvojky (3 možnosti ak sú obe v rovnakom činiteli, 3 možnosti ak sú v dvoch rôznych činiteľoch) a $3 \cdot 3 = 9$ možností, ako umiestniť 5 a 101 (3 možnosti pre každé z nich). Dokopy je teda $6 \cdot 9 = 54$ možností, ako rozmiestniť čísla 2, 2, 5, 101 medzi 3 činitele. Každá z týchto možností nám presne určí hodnoty a, b, c, a teda aj deliteľa $D = 2^a \cdot 5^b \cdot 101^c$. Ešte by nám mohlo napadnúť, či žiadne z týchto čísel nie je väčšie ako 2020^{2020}. Ak by však aj všetky čísla 2, 2, 5, 101 skončili v jednom činiteli, tak tento činiteľ by bol $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101 = 2020$, a teda číslo $X = 2^a \cdot 5^b \cdot 101^c$ by bolo určite menšie ako 2020^{2020}.

Úloha 3.11: Na obrázku vidíme písmeno S, ktoré je vytvorené z dvoch oblúkov KL a MN a z úsečky LM, ktorá je dotyčnicou oboch kružníc. Každý z oblúkov tvorí päť osmín obvodu kružnice s polomerom 1. Bodmi K a N prechádzajú dotyčnice oboch kružníc. Aká je dĺžka úsečky LM?



Výsledok: 2

Riešenie: Ako prvé si uvedomme, že bod L leží vo vrchole štvorca, vpísaného do prislúchajúcej kružnice, so stranami rovnobežnými so stranami obdĺžnika. Je tomu tak preto, lebo tento štvorec má vrcholy v jednej, troch, piatich a siedmich osminách kružnice od vrchola K.

Všimnime si, že úsečka spájajúca stred ľavej kružnice s bodom L zviera uhol 45° so stranami štvorca. Z toho vyplýva, že kolmica na ňu, čo je dotyčnica, bude zvierať rovnako veľký uhol - 45°. Teda LM zviera uhol 45° so zvislou stranou štvorca vpísaného do kružnice.

Vezmime si pravouhlý trojuholník tvorený preponou LM a odvesnami rovnobežnými so stranami obdĺžnika. Môžeme si všimnúť, že jedna z týchto odvesien je strana vpísaného štvorca do ľavej kružnice (pretože M je analogicky vrcholom štvorca vpísaného do druhej kružnice). Čiže náš trojuholník je rovnoramenný (má totiž uhly 45°, 90° a 45°).

Teda odvesny tohto trojuholníka sú zhodné so stranami vpísaného štvorca. Z toho vyplýva, že LM je rovnako dlhé ako uhlopriečka tohoto štvorca, čo je priemer kružnice. Teda $|LM| = 2$.

Úloha 3.12: Aké sú posledné dve číslice čísla $7^{7^{7^7}} - 1$?

Výsledok: 42

Riešenie: Posledné dve cifry čísla predstavujú jeho zvyšok po delení stomi, takže uvažujme, aké zvyšky nadobúdajú mocniny sedmičky po delení číslom sto: $7^0 = 1$ má zvyšok 1, 7^1 potom bude mať zvyšok $7 \cdot 1 = 7$, 7^2 bude mať zvyšok $7 \cdot 7 = 49$, 7^3 má zvyšok $7 \cdot 49 = 343$, čiže zvyšok 43 a 7^4 má zvyšok $7 \cdot 43 = 301$, čiže opäť zvyšok 1 (vždy nám stačí vynásobiť siedmimi iba predchádzajúci zvyšok). Ďalej sa budú zvyšky už opakovať v cykle 1, 7, 49 a 43, teda každý štvrtý zvyšok bude rovnaký. Z tohto dôvodu nám teda na určenie posledného dvojčíslia výrazu $7^{7^{7^7}}$ stačí zistiť, aký zvyšok nadobúda výraz 7^{7^7} po delení štyrmi.

Číslo 7 patrí po delení štyrmi do rovnakej zvyškovej triedy ako číslo -1. To znamená, že ak uvažujeme zvyšok po delení štyrmi, môžeme výraz 7^{7^7} nahradiť výrazom $(-1)^{7^7}$. Všimnime si, že 7^7 je nepárne číslo. Tým pádom $(-1)^{7^7} = -1$, takže výraz 7^{7^7} patrí po delení štyrmi do rovnakej zvyškovej triedy ako číslo -1, čo zodpovedá zvyšku 3.

Dospeli sme k tomu, že výraz 7^{7^7} má zvyšok 3 po delení štyrmi, čo znamená, že výraz $7^{7^{7^7}}$ má zvyšok 43 po delení 100. Po odčítaní jednotky zistíme, že posledné dve cifry výrazu zo zadania sú cifry 4 a 2.

autori:	Jana Baranová, Erik Berta, Viktória Brezinová, Jakub Genči, Matúš Hlaváčik, Róberta Juríková, Tomáš Kocák, Peter Kovács, Samuel Krajči, Martin Masrna, Martin Mihálik, Kristína Mišlanová, Daniel Onduš, Žaneta Semanišinová, Martin Spišák, Martin Števko
recenzia a úprava:	Jana Baranová, Michaela Dlugošová, Róberta Juríková, Martin Masrna, Martin Mihálik, Lujza Milotová
názov:	**Košický Matboj – 6. 5. 2022**
vydavatelia:	Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta Združenie STROM
web:	`seminar.strom.sk/sk/matboj`