



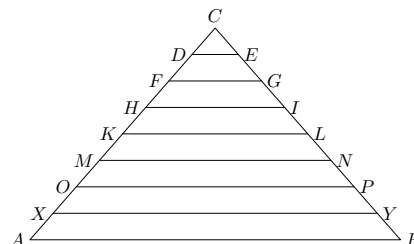
# Košický Matboj

Košice 25. 10. 2013

## Košícký Matboj, 25. 10. 2013, 1. časť

**1.1.** Maliar si miešal farby na maľovanie stien. Zmiešal červenú a žltú farbu v pomere 2 : 3. Výsledná farba bola príliš svetlá a tak primiešal 2 litre červenej farby. Konečná zmes bola v pomere 3 : 2. Koľko litrov namiešanej farby mal?

**1.2.** Majme rovnoramenný trojuholník  $ABC$ , s ramenami  $BC$  a  $AC$ . Úsečky  $DE, FG, HI, KL, MN, OP$  a  $XY$  delia strany  $AC$  a  $CB$  na rovnaké časti. Aká je dĺžka úsečky  $XY$  ak  $|AB| = 40$  cm.



**1.3.** Zoberme si dvojciferné čísla menšie ako 40, ktoré sú prvočísla, alebo čísla deliteľné len jedným prvočíslom. Z tejto množiny vyberieme tie čísla, ktorých ciferný súčet je prvočíslom a kladný rozdiel cifier týchto čísel je tiež prvočíslom. Aký je súčet vybraných čísel?

**1.4.** Laco jazdí z miesta  $A$  do miesta  $B$ . Tretina cesty je hore kopcom, tretina dolu kopcom a zvyšok je po rovine. Hore kopcom ide rýchlosťou 16 km/h a na rovine 24 km/h. Ak priemerná rýchlosť počas celého výletu je 24 km/h, aká je rýchlosť ktorou ide pri jazde dole kopcom?

**1.5.** Z čísiel 1, 2, 3, 4 a 5 je vytvorené 5 ciferné číslo  $\overline{abcde}$  s vlastnosťou, že  $\overline{abc}$  je deliteľné 4,  $\overline{bcd}$  je deliteľné 5 a  $\overline{cde}$  je deliteľné 3. Určte cifru  $a$ .

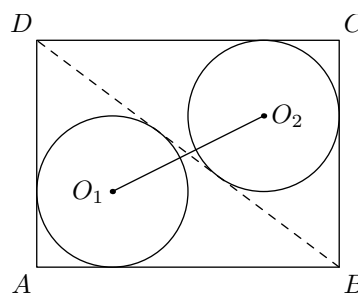
**1.6.** Hodíme súčasne desiatimi mincami. Vypočítajte pravdepodobnosť, že znak padne najviac na troch minciach.

**1.7.** Nájdite všetky celočíselné riešenia rovnice

$$x^2 + 11^2 = y^2.$$

**1.8.** Štvoruholník  $ABCD$  je vpísaný do kružnice. Uhlopriečky  $AC$  a  $BD$  sa pretínajú v bode  $Q$ . Polpriamky  $DA$  a  $CB$  sa pretínajú v bode  $P$ . Ak platí, že  $|CD| = |CP| = |DQ|$ , určte veľkosť uhla  $CAD$ .

**1.9.** Obdĺžnik  $ABCD$ , kde  $|AB| = 8$  cm a  $|BC| = 6$  cm. Kružnice so stredmi  $O_1$  a  $O_2$  sú vpísané trojuholníkom  $ABD$  a  $BCD$ . Určte vzdialenosť medzi stredmi  $O_1$  a  $O_2$ .



**1.10.** Riešte sústavu rovníc v obore reálnych čísel:

$$\begin{aligned} x + y &= 4, \\ (x^2 + y^2) \cdot (x^3 + y^3) &= 280. \end{aligned}$$

**1.11.** Určte počet 4-ciferných čísel  $\overline{abcd}$  takých, že  $a > b > c > d$ .

**1.12.** Aký najväčší objem môže mať valec vpísaný do gule s objemom 1 m<sup>3</sup>?

### Výsledky

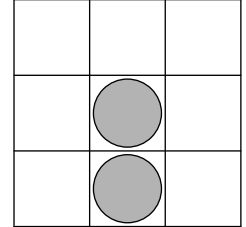
**1.1.** 6 litrov **1.2.** 35 cm **1.3.** 70 **1.4.** 48 km/h **1.5.** 1 **1.6.**  $176/2^{10} = 176/1024 = 11/64$  **1.7.**  $(x,y) \in \{(-60,61), (60,-61), (0,11), (0,-11), (60,61), (-60,-61)\}$  **1.8.**  $60^\circ$  **1.9.**  $2\sqrt{5}$  **1.10.**  $(x,y) \in \{(1,3), (3,1)\}$

**1.11.**  $\binom{10}{4} = \binom{9}{4} + \binom{9}{3}$  **1.12.**  $\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ m}^3$

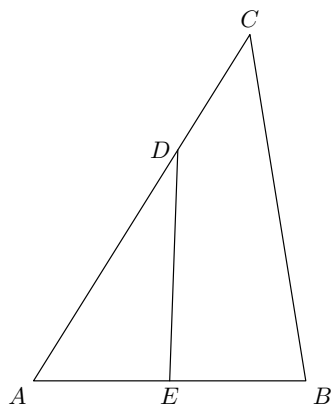
## Košícký Matboj, 25. 10. 2013, 2. časť

**2.1.** Robčo si vzal na cestu z internátu do školy taxík. Mal na výber z dvoch spoločností. Taxi Úžerník má štartovné 10 Eur a potom inkasuje za každý kilometer 50 centov. Taxi Zlodej má štartovné 4 Eura a potom inkasuje za každý kilometer 80 centov. Robčo skúsil obidve spoločnosti a zistil, že platil rovnako. Ako ďaleko v kilometroch je vzdialený internát od školy?

**2.2.** Hra Kamienky je hraná na plátniku  $3 \times 3$  s dvomi identickými kameňkami. Ak tieto kameňky susedia vodorovne, zvislo alebo diagonálne, jeden kameňok môže preskočiť druhý a premiestniť sa na voľné miesto v riadku, stĺpci alebo na diagonále. Koľko existuje rozostavení kameňkov tak, aby nebol možný ťah?



**2.3.** Riešte rovnicu v reálnych číslach  $(\log x^3)^2 - 10 \cdot \log x + 1 = 0$ .



**2.4.** Dvojica dvojčiferných čísel má nasledujúce vlastnosti

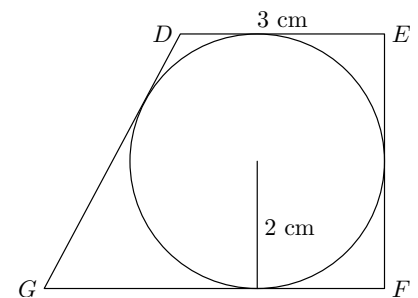
- súčet cifier týchto čísel je 17,
- súčet čísel je 89,
- súčin cifier týchto čísel je 210.
- súčin čísel je väčší ako 1900.

Určte obidve čísla.

**2.5.** Nech  $ABC$  je trojuholník. Bod  $E$  leží na strane  $AB$  a bod  $D$  na strane  $AC$  tak, že  $|AE| = |EB| = |DC| = 1$  cm a  $|AD| = 2$  cm. Určte v akom pomere je obsah štvoruholníka  $BCDE$  k obsahu trojuholníku  $ABC$ .

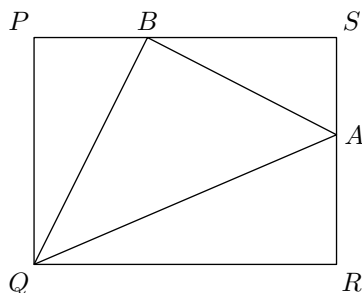
**2.6.** Nech  $A$  je dvojčiferné kladné číslo neobsahujúce nulu ako cifru a  $B$  je trojčiferné číslo. Navyše  $A$  percent z  $B$  je 400. Nájdite všetky hodnoty  $A$  a  $B$ .

**2.7.** Lichobežník  $DEFG$  má vpísanú kružnicu s polomerom 2 cm,  $|DE| = 3$  cm a  $|\sphericalangle DEF| = |\sphericalangle EFG| = 90^\circ$ . Určte obsah lichobežníka.



**2.8.** Koľkými spôsobmi môžeme rozdeliť 8 chlapcov a 4 dievčatá na dve 6 členné družstvá tak, aby v každom družstve bolo aspoň jedno dievča?

**2.9.** Koľko celočíselných riešení  $[x, y]$  má rovnica  $15x^2 - 7y^2 = 9$ ?



**2.10.** Nájdite všetky dvojice celých čísel  $x, y$  také že  $x + y, 2x + y, 2y + x$  sú štvorce.

**2.11.** Nech  $PQRS$  je obdĺžnik s obsahom  $10 \text{ cm}^2$ . Bod  $A$  leží na  $RS$ , bod  $B$  leží na  $PS$  tak, že obsah trojuholníka  $QAB$  je  $4 \text{ cm}^2$ . Určte najmenšiu hodnotu  $|PB| + |AR|$ .

**2.12.** Zistite, koľko telesových uhlopriečok má 12-sten.

### Výsledky

**2.1.** 20 **2.2.** 20 **2.3.**  $10, \sqrt[9]{10}$  **2.4.** 52,37 **2.5.**  $2/3$  **2.6.** (64,625) **2.7.**  $18 \text{ cm}^2$  **2.8.**  $\frac{1}{2} \binom{12}{6} - \binom{8}{6} = 434$  **2.9.** Žiadne **2.10.** Len (0,0) iné nesedia kvôli zvyškom po delení 4 **2.11.**  $2\sqrt{2}$  **2.12.** 100

## Košícký Matboj, 25. 10. 2013, 3. časť

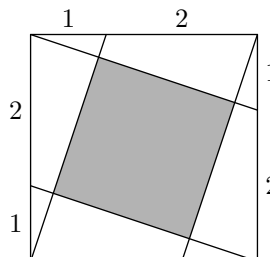
**3.1.** Koľko existuje šesťciferných čísel vytvorených z cifier 1, 2, 3, 4, 5, 6 ak súčin každých dvoch susediacich cifier je párne číslo. (Každú cifru použijeme práve raz.)

**3.2.** Pre ktoré prvočísla  $a, b$  platí:  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2,9$ ? Resp. koľko dvojíc  $[a, b]$  takých existuje?

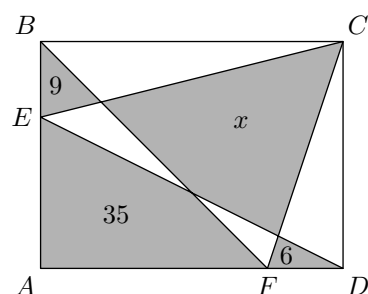
**3.3.** Majme obdĺžnik  $ABCD$ . Bod  $P$  leží na strane  $BC$  a bod  $Q$  na strane  $CD$  tak, že  $|BP| = 1$  cm a  $|AP| = |PQ| = 2$  cm a  $\sphericalangle APQ = 90^\circ$ . Určte dĺžku  $QD$ .

**3.4.** Nájdite všetky 4-ciferné čísla  $\overline{abcd}$ ,  $a \neq 0$  také, že  $\overline{abcd} = a^a + b^b + c^c + d^d$ .

**3.5.** Štvorec dĺžky 3 decimetre je rozdelený na niekoľko častí ako na obrázku. Koľko percent pôvodného obsahu štvorca je sivý štvorec?



**3.6.** Ak zapíšeme čísla 1, 2, 3, ..., 9 po riadkoch do mriežky  $3 \times 3$ , súčet čísel na diagonálach je 15. Aký je súčet na diagonálach ak do mriežky  $100 \times 100$  zapíšeme čísla od 1 do 10000?



**3.7.** Úsečky  $DE, CE, BF$  a  $CF$  rozdeľujú obdĺžnik na časti. Štyri z týchto častí sú zafarbené na obrázku a majú obsahy  $9 \text{ cm}^2, 35 \text{ cm}^2, 6 \text{ cm}^2$  a  $x \text{ cm}^2$ . Určte hodnotu  $x$ .

**3.8.** O kladných reálnych číslach  $a, b, c$  vieme, že  $a + b + c = 6$ . Určte maximálnu hodnotu  $a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}$

**3.9.** Bod  $P$  vnútri obdĺžnika  $ABCD$  má tú vlastnosť, že  $|PA| = 4$  cm,  $|PC| = 5$  cm a  $|PD| = 6$  cm. Zistite veľkosť  $|PB|$ .

**3.10.** Číslo  $\sqrt{24} + \sqrt{572}$  je možné napísať v tvare  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ , kde  $a$  a  $b$  sú celé čísla a  $b > a$ . Aká je hodnota  $b - a$ ?

**3.11.** Máme 9 bodov na obvode kruhu. Spojíme každý bod s každým. Na koľko najviac častí rozdelia kruh?

**3.12.** V trojuholníku  $ABC$ ,  $|AB| = 10$  cm a  $|AC| = 18$  cm. Bod  $M$  je stred  $BC$  a priamka prechádzajúca cez bod  $M$ , kolmá na os uhla  $CAB$  pretína  $AB$  v bode  $D$ . Určte dĺžku  $AD$ .

### Výsledky

**3.1.** 144 **3.2.**  $[5, 2]$  a  $[2, 5]$  **3.3.**  $\sqrt{3} - 1$  **3.4.** 3435 **3.5.** 40% **3.6.** 500 050 **3.7.**  $50 \text{ cm}^2$  **3.8.** 12 **3.9.**  $|PB| = \sqrt{5} \text{ cm}$  **3.10.** 2 **3.11.**  $1 + \binom{9}{2} + \binom{9}{4} = 1 + 36 + 126 = 163$  **3.12.** 14 cm



<http://www.strom.sk>  
<http://seminar.strom.sk>  
<http://seminar.strom.sk/matboj>



<http://www.upjs.sk/prirodovedecka-fakulta>  
<http://skoly.science.upjs.sk>  
<http://www.upjs.sk/prirodovedecka-fakulta/informacie-pre-zaujemcov-o-studium>